5. Virtuelle Zeit in verteilten Systemen

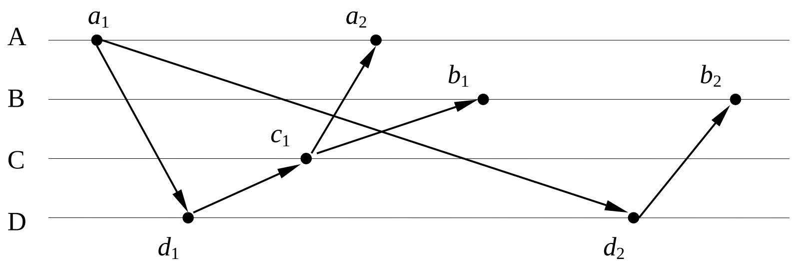
5.1. Konsistente Zustände

- ***Ausgangspunkt***

– *Prozeß:* Folge von „atomaren Aktionen“, die jeweils einen lokalen Zustandsübergang bewirken und das Aussenden evtl. mehrerer Nachrichten zur Folge haben können. Das Eintreffen einer Nachricht löst gleichfalls eine Aktion aus.

– *Zeitdiagramm*

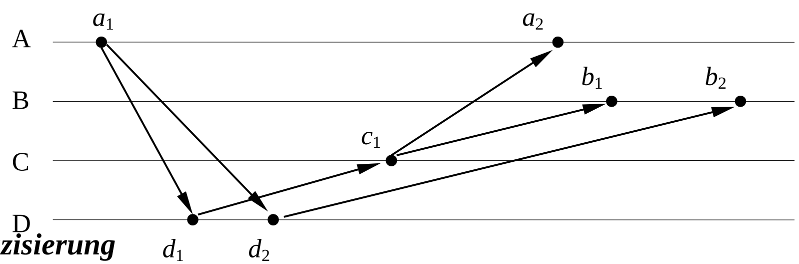
Beispiel 5.1.



– *Gesamtzustand:* Menge der lokalen Prozeßzustände sowie aller Nachrichten, die zu diesem Zeitpunkt unterwegs sind.

– *Schnitt (-linie)*

„Gummibandtransformation“



- ***Präzisierung***

– *Verteilte Berechnung:* Menge E von Ereignissen, die in den Prozessen $P_1,\ldots,P_n$ stattfinden. E besteht aus Sende-, Empfangs- und internen Ereignissen. Es sei $\Pi = \{P_1,\ldots,P_n\}$.

– *Definition 5.1.* Sei $\lhd$ die binäre Relation in E („*direkter Vorgänger*“), für die $e \lhd e'$ $(e,e' \in E)$ genau dann gilt, wenn

(1) e, e' im gleichen Prozeß stattfinden und sich e lokal zeitlich direkt vor e' ereignet *oder*

(2) e' ein zum Sendeereignis e gehörendes Empfangsereignis ist.

– *Definition 5.2.* $\prec$ bezeichne die transitive Hülle von $\lhd$ („*kann beeinflussen*“, potentielle Kausalität).

$\lhd$ ist offenbar irreflexiv und asymmetrisch, also $\prec$ eine irreflexive Halbordnungsrelation (LAMPORTs „happens-before“-Relation).

– *Definition 5.3.* Für $e,e' \in E$ gelte

$e \parallel e' \;:\Leftrightarrow\; \neg(e \prec e') \wedge \neg(e' \prec e)$ („*kausal unabhängig*“) .

$\parallel$ ist offenbar symmetrisch und reflexiv, aber nicht transitiv.

Für $e,e' \in E$ gilt stets $e \prec e' \;\mid\; e' \prec e \;\mid\; e \parallel e'$.

– *Definition 5.4.* $\prec_P$ bezeichne die lokale Ereignisordnung, d.h. $e \prec_P e'$ genau dann, wenn $e \prec e'$ und e,e' im selben Prozeß P stattfinden.

$\prec_P$ ist offenbar konnex, d.h. strikte totale Ordnung.

– *Definition 5.5.* Eine endliche Teilmenge $S \subseteq E$ heißt *Schnitt* von E, falls gilt:

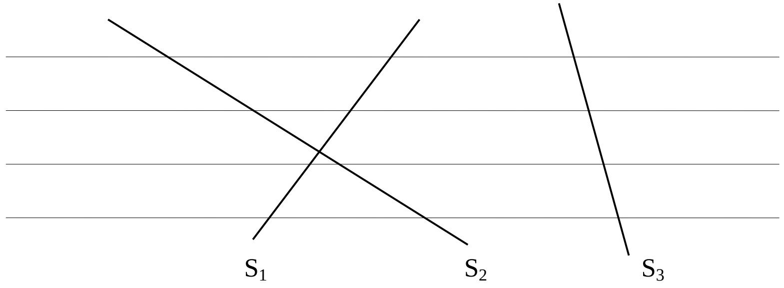
$$e' \prec_P e \;\Rightarrow\; e' \in S \qquad \forall e \in S \;\; \forall e' \in E \;\; \forall P \in \Pi.$$

– *Definition 5.6.* Eine endliche Teilmenge $S \subseteq E$ heißt *konsistenter Schnitt* von E, falls gilt:

$$e' \prec e \;\Rightarrow\; e' \in S \forall e \in S \;\; \forall e' \in E.$$

– *Beispiel 5.2.*

– *Definition 5.7.* Ein Schnitt S' heißt *später* als ein Schnitt S bei $S' \supseteq S$.



Es gilt:

Bezeichnet S die Menge aller Schnitte von E, so ist $[\mathsf{S}; \cap, \cup]$ ein Verband; die Menge der konsistenten Schnitte bildet darin einen Teilverband. Die zugehörige Halbordnungsrelation ist die später-Relation.

Damit gibt es für je zwei konsistente Schnitte einen, der früher und einen, der später ist als beide.

– *Globaler Zustand:*

$P(e)$ bezeichne den Zustand von $P \in \Pi$ unmittelbar nach dem lokalen Ereignis e.

Definition 5.8. Der globale Zustand $Z(S)$ eines konsistenten Schnittes S ist ein Paar $Z(S) = [P(S), N(S)]$ mit:

$$P(S) = \bigtimes_{P \in \Pi} P(e_P), \qquad e_P \text{ größtes Element bzgl. } \prec_P \text{ in } S;$$

$$N(S) = \{N \mid N \text{ Nachricht, } e_N \in S,\; e'_N \notin S\}$$

$$e_N \text{ Sendeereignis, } e'_N \text{ Empfangsereignis.}$$

5.2. Realzeit und virtuelle Zeit

- ***Struktur der Realzeit***

  Algebraische Struktur $[T, <]$, wobei $<$ eine binäre Relation ist mit:

  (1) irreflexiv

  (2) transitiv

  (3) konnex: $x < y \;\vee\; y < x \;\vee\; x = y$;

  (4) unbeschränkt: $\forall x \exists y: y < x$ und $\forall x \exists y: x < y$;

  (5) dicht: $\forall x,y(x < y \Rightarrow \exists z: x < z < y)$.

- ***Virtuelle Zeit (Zeitstempelverfahren)***

  Virtuelle Zeit kann nur als Folge von Ereignissen wahrgenommen werden, ist mithin diskret.

– *Logische Uhr:*

  Abbildung

  $C: E \to T$ wobei $[T, <]$ (halb-)geordnete Menge

  mit „Uhrenbedingung“:

  $e \prec e' \Rightarrow C(e) < C(e')$.

  Oft $T = \mathbb{N}$. C wird bei n Prozessen durch n Zähler C_i implementiert, die folgende Bedingung erfüllen ($i = 1,\ldots,n$):

  (1) Führt P_i ein internes Ereignis oder ein Sendeereignis aus, so „tickt“ die Uhr C_i:

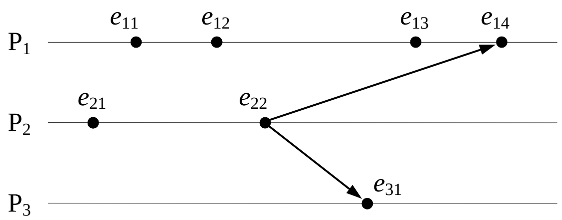
  $C_i := C_i + d \qquad (d > 0)$.

  (2) Jede gesendete Nachricht erhält Zeitstempel mit der lokalen Zeit des Sendeereignisses.

  (3) Empfängt P_i eine Nachricht mit Zeitstempel t, so wird Uhr von von P_i aktualisiert:

  $C_i := \max(C_i, t) + d$.

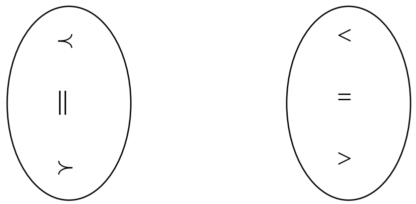
– *Beispiel 5.3.* $d = 1$, Initialisierung: $C_i = 0$.



– *Problem:*

  Zeitstempelverfahren erhält nicht kausale ***Un***abhängigkeit.

  Unabhängige Ereignisse $e \| e'$ können den gleichen oder unterschiedliche Zeitstempel haben:

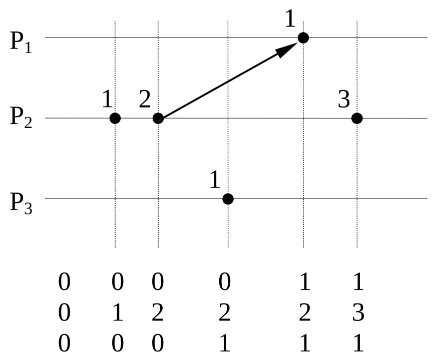


Ursache: C ist *Homo*morphismus von einer Halbordnungs- in eine Ordnungsrelation.

5.3. Vektorzeit

- ***Veranschaulichung***

  Jeder Prozeß P_i besitzt eine einfache logische Uhr C_i ($T = \mathbb{N}$), die bei jedem Ereignis um 1 tickt; Beobachter von außen sieht dann „Vektorzeit“:



- ***Vektorzeit***

  Jeder Prozeß P_i ($i = 1,\ldots,n$) besitzt eine Vektoruhr

  $\underline{C}_i = (C_i(1),\ldots,C_i(n))$.

  Jedes Ereignis in P_i führt zum Ticken der Uhr:

  $C_i(i) := C_i(i) + 1$,

  $C_i(j)$ unverändert für $j \neq i$.

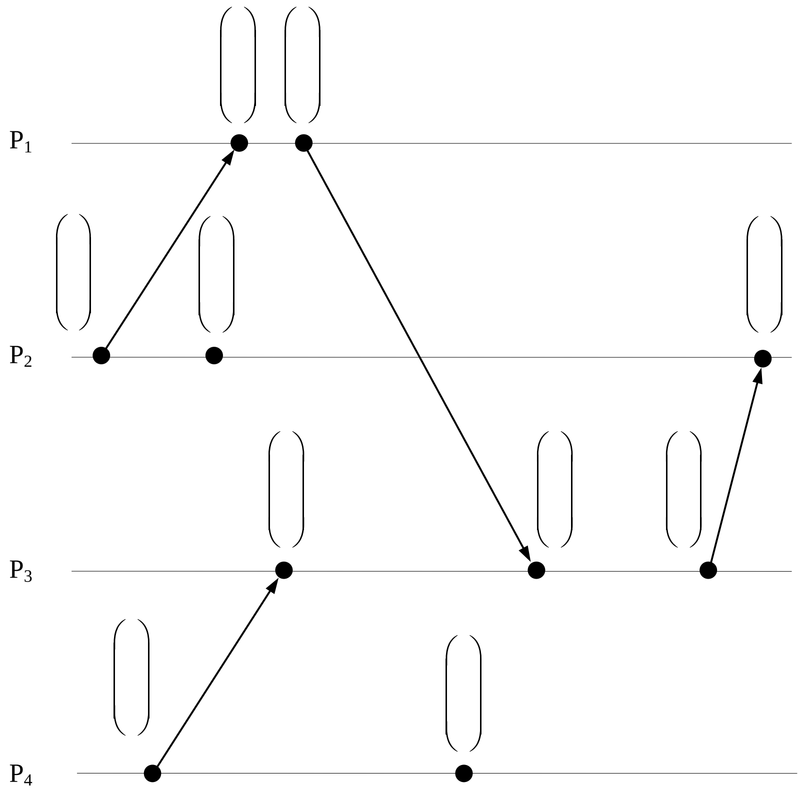
  Zeitstempel von Ereignissen und Nachrichten ist ein n-dimensionaler Vektor $\underline{t}$. Bei Empfang einer Nachricht mit Zeitstempel $\underline{t}$ in Prozeß P_i wird die Vektoruhr aktualisiert:

  $\underline{C}_i := \sup(\underline{C}_i, \underline{t})$

  (sup: komponentenweises Maximum zweier Vektoren).

  Initialisierung: $\underline{C}_i := \underline{0}$

– *Beispiel 5.4.*



– ***Satz 5.1.***

a) Zu jedem Zeitpunkt der Realzeit gilt:

$$C_i(i) \geq C_i(j) \qquad \forall i,j = 1,\ldots,n.$$

b) Ist e Ereignis von P_i und e' Ereignis mit $e \| e'$, so gilt:

$$C_i^e(i) \geq C_j^{e'}(i) \qquad \forall j = 1,\ldots,n.$$

– *Definition 5.9.* Für zwei Zeitvektoren $\underline{u}, \underline{v}$ sei

$$\underline{u} \leq \underline{v} \;:\Leftrightarrow\; u(i) \leq v(i) \qquad \forall i = 1,\ldots n;$$

$$\underline{u} < \underline{v} \;:\Leftrightarrow\; \underline{u} \leq \underline{v} \;\wedge\; \underline{u} \neq \underline{v}\,;$$

$$\underline{u} \,\|\, \underline{v} \;:\Leftrightarrow\; \neg(\underline{u} < \underline{v}) \wedge \neg(\underline{v} < \underline{u}).$$

Damit ist || ein Verallgemeinerung der Gleichzeitigkeit der Standardzeit.

- ***Zeit von Schnitten***

– *Definition 5.10.* Sei X ein Schnitt und jeweils c_i das maximale Ereignis von P_i in X. Dann heißt

$$\underline{t}_X := \sup(\underline{C}_1^{c_1},\ldots,\underline{C}_n^{c_n})$$

die globale Zeit des Schnitts.

Beispiel 5.4'.

– ***Satz 5.2.*** Ein Schnitt X mit den Schnittereignissen c_i ist konsistent genau dann, wenn

$$\underline{t}_X = (\underline{C}_1^{c_1}(1),\ldots,\underline{C}_n^{c_n}(n)).$$

Beispiel 5.4''.

5.4. Die Struktur der Vektorzeit

- ***Begriffe und Aussagen***

– *Es gilt:*

Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $[\mathbb{N}^n; \inf, \sup]$ ein Verband, und $[\mathbb{N}^n; \leq]$ i.S.v. Def. 5.9 ist die zugehörige Halbordnungsrelation.

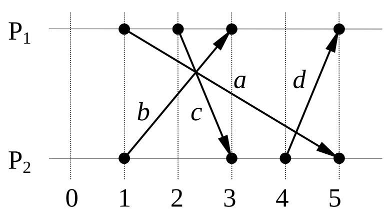
(inf, sup: komponentenweises Minimum/Maximum).

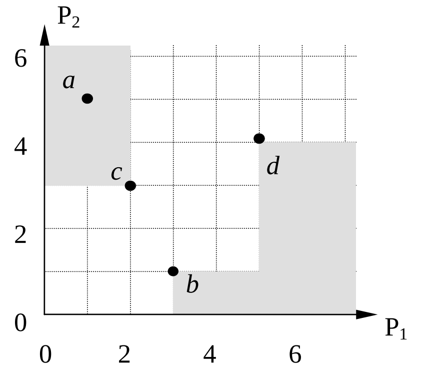
– *Restriktion:* (i,s,j,r); entspricht einer Nachricht, die im s-ten Ereignis von P_i gesendet und im r-ten Ereignis von P_j empfangen wird.

D.h.: Gilt $C_i(i) = s$ und $C_j(j) = r$, so folgt für die globale Zeit $C(\underline{t})$

$$C(i) < s \;\Rightarrow\; C(j) < r.$$

– *Beispiel 5.5.*

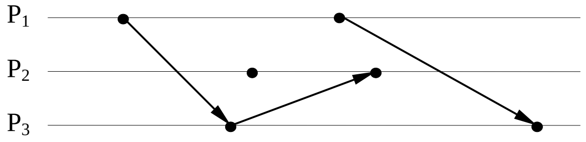


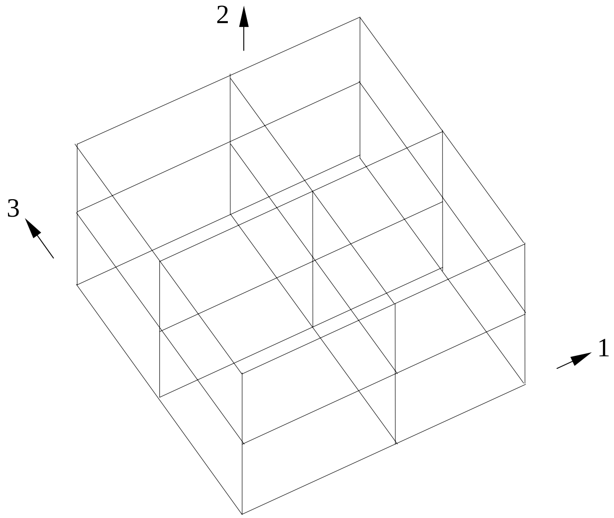


– Ein Zeitvektor heißt *möglich* bzgl. einer Ereignisstruktur mit Restriktionen $R_1,\ldots,R_k$, wenn er jeder dieser Restriktionen genügt.

– ***Satz 5.3.*** Die Menge der möglichen Zeitvektoren einer Ereignisstruktur mit Restriktionen ist eine Teilhalbordnung von $[\mathbb{N}^n; \leq]$ (bzw. ein Teilverband von $[\mathbb{N}^n; \inf, \sup]$).

– *Beispiel 5.6.*





- ***Zusammenhang zur Kausalität***

– ***Satz 5.4.*** Für eine Ereignisstruktur E sind der Verband der konsistenten Schnitte und der Verband der möglichen Zeitvektoren isomorph.

– *Folgerung.* Für alle $e,e' \in E$ gilt:

$$e \prec e' \iff \underline{C}^{e} < \underline{C}^{e'}$$
$$e \| e' \iff \underline{C}^{e} \| \underline{C}^{e'}.$$