

2. Probabilistische Modelle

- **Modellannahmen**

Zu zufälligen Zeiten A_i (Ankunftszeit) treffen Anforderungen an den Scheduler in zufälligem Umfang B_i (geforderter Bedarf nach dem betrachteten Betriebsmittel, Bedienungszeit) ein.

Anwendungsbereich: interaktiver Betrieb, verteilte Systeme

- **Mathematisches Instrumentarium**

Bedienungstheorie

Queueing (systems) theory

Теория массового обслуживания

- **Historie**

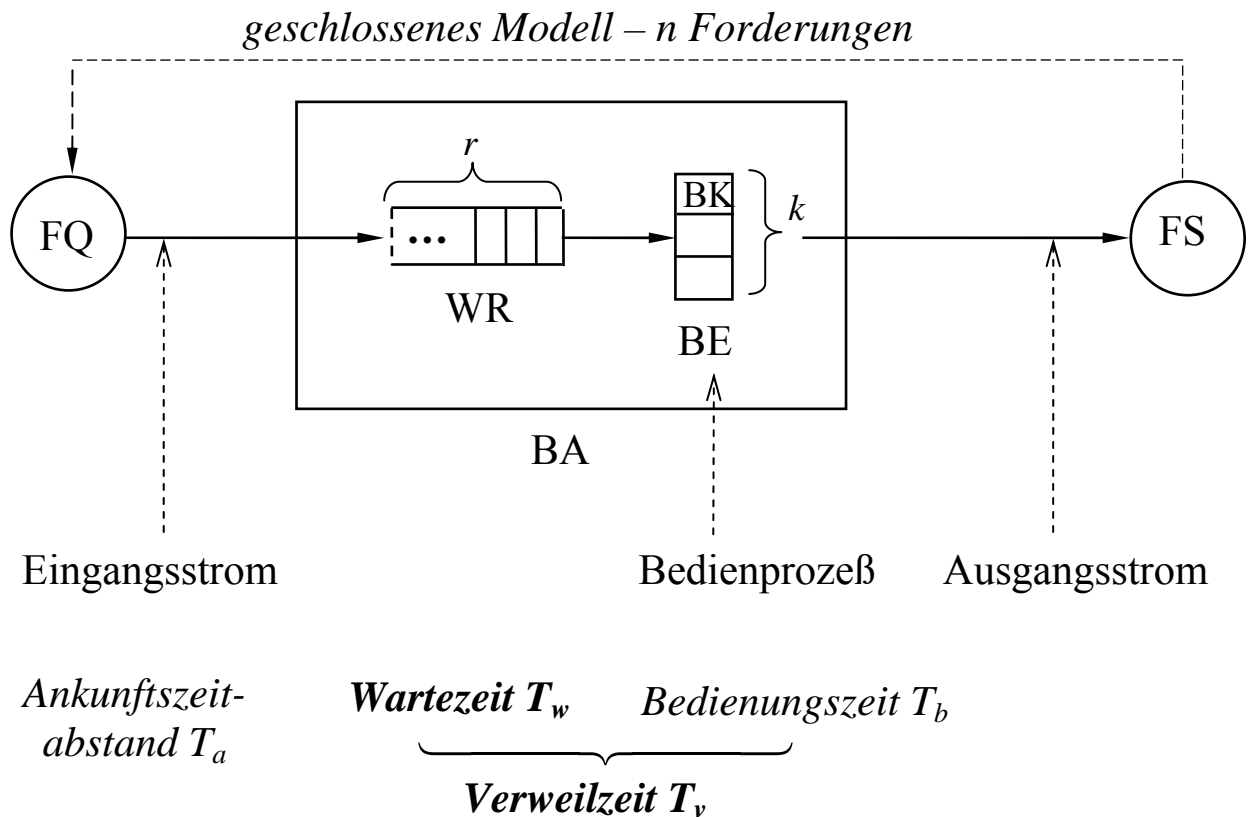
1908 ERLANG Telegraphenamt Kopenhagen

1910 PALM Mehrmaschinen-Bedienung

1940 ... 1970 KANTOROWITSCH, GNEDENKO, KOWALENKO

1965 ... 1980 KLEINROCK, COFFMAN, DENNING

2.1. Bedienungssysteme – Grundlagen



BA Bedienungsanlage

WR Warteraum

BE Bedienungseinrichtung

BK Bedienungskanal

FQ Forderungsquelle

FS Forderungssenke

- **Strukturbeschreibung**

- **Größe r des Warteraums**

$r = 0$ (reines) Verlustsystem

$0 < r < \infty$ (gemischtes) Warte-Verlust-System

$r = \infty$ (reines) Wartesystem

- **Struktur der Bedienungseinrichtung**

Einkanalbedienung

Mehrkanalbedienung

Mehrphasenbedienung

- **Bedienungsstrategie (Warteschlangendisziplin)**

FIFO, LIFO

RANDOM

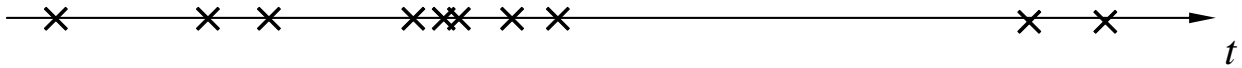
Prioritäten (absolut/relativ, statisch/dynamisch)

z. B. SPT, LJN, HRN, ...

- **Offenes/geschlossenes Modell**

- **Lastbeschreibung**

- **Ankunftsprozeß**



N_a zufällige Anzahl der pro Zeiteinheit eintreffenden Forderungen

T_a zufälliger Abstand zwischen dem Eintreffen zweier Forderungen

oft: POISSONScher Ankunftsprozeß mit dem Parameter $\lambda > 0$:

$$P(N_a = i) = \frac{\lambda^i}{i!} \cdot e^{-\lambda} \quad i \in \mathbb{N} \quad \text{POISSON-Verteilung}$$

$$P(T_a \leq t) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \text{Exponential-Verteilung}$$

Es gilt:

$$\lambda = E(N_a) = \frac{1}{E(T_a)}$$

Eingangsstromintensität,
Ankunftsrate

- **Bedienprozeß**

T_b zufällige Dauer der Bedienung einer Forderung

oft: exponentiell verteilte Bedienzeit, Bedienrate μ

– Weitere wichtige Verteilungen

ERLANG-Verteilung k -ter Ordnung, $k \in \mathbb{N}^+$

$$f(t) = \frac{\alpha^k t^{k-1}}{(k-1)!} \cdot e^{-\alpha t} \quad (t \geq 0)$$

Hyperexponentialverteilung

$$f(t) = \sum_{i=1}^k p_i \cdot \alpha_i e^{-\alpha_i t} \quad p_i \in [0, 1], \quad \sum p_i = 1$$

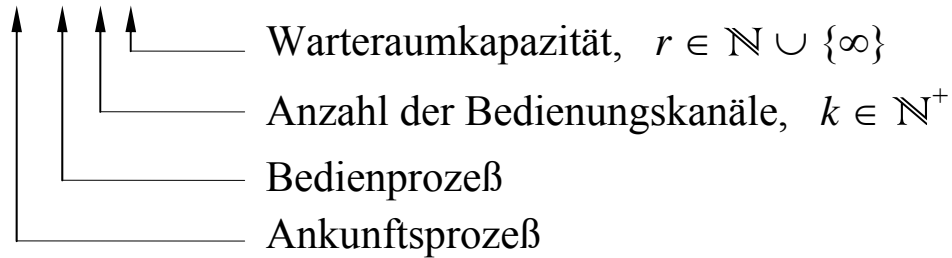
Hypoexponentialverteilung

$$f(t) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2} (e^{-\alpha_1 t} - e^{-\alpha_2 t}) \quad \alpha_1, \alpha_2 > 0, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$$

- **Zusammengefaßte Beschreibung**

- **KENDALLsche Notation**

A/B/k/r



Wichtige Werte für A, B:

- M POISSON-Prozeß
- E_k ERLANG-Verteilung k -ter Ordnung
- D Deterministische Verteilung
- G Allgemeiner Fall

- **Bedienungsstrategie!**

- **Geschlossenes Modell**

n : Anzahl der Forderungen im System (statt r)

- **Bewertungsgrößen für offene Bedienungssysteme GI/G/k/r**

- *Unmittelbar abgeleitete Größen*

$E(T_a)$ mittlerer Ankunftszeitabstand

$E(T_b)$ mittlere Bedienzeit

$\lambda = \frac{1}{E(T_a)}$ Ankunftsrate

$\mu = \frac{1}{E(T_b)}$ Bedienrate

$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{E(T_b)}{E(T_a)}$ Verkehrswert (Angebot, **Belastung**)

Forderung: $\rho < k$ für nicht-kritischen Zustand

– **Bewertungsgrößen i.e.S.**

N_w	Warteschlangenlänge
N_b	Anzahl der aktuell bedienten Forderungen
$N_v = N_w + N_b$	Anzahl der im System befindlichen Forderungen
T_w	Wartezeit
$T_v = T_w + T_b$	Verweilzeit

Für GI/G/k/∞-Systeme gilt:

$$E(T_v) = E(N_v) \cdot E(T_a)$$

(LITTLE)

Ferner:

p_0	Stillstands-, Leerwahrscheinlichkeit
p_v	Verlustwahrscheinlichkeit
η	Auslastung der Bedieneinrichtung

Grundlage: Zustandswahrscheinlichkeiten

$$p_i = P(N_v = i), \quad i \in \mathbb{N}$$

– **Allgemeines Vorgehen**

Ermitteln des Zustandsgraphen

Aufstellen der Zustandsgleichungen

Lösen des Gleichungssystems

Berechnen der Zustandswahrscheinlichkeiten

Berechnen der Bewertungsgrößen

2.3. Ausgewählte Standardsysteme

- **M/M/1/∞-System**

- **Systembeschreibung**

Eingangsstrom: POISSON-Prozeß, Intensität λ

Bedienungszeit: exponentiell verteilt, Parameter μ

Bedienungsstrategie: FIFO, LIFO, gleichverteilt

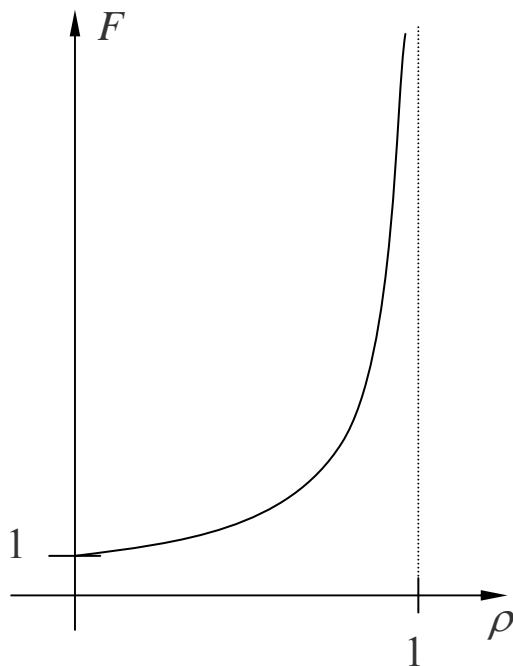
Verkehrswert $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1 !$

- **Zustandswahrscheinlichkeiten**

$$p_i = \rho^i \cdot (1 - \rho) \quad i = 0, 1, \dots$$

- **Systemverhalten**

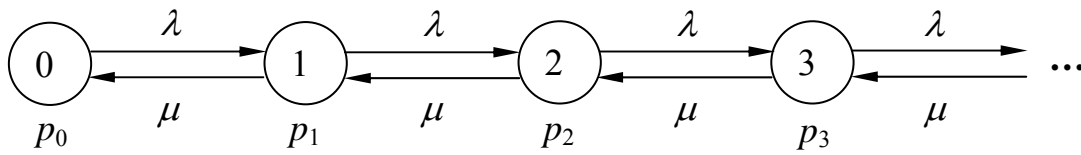
Verweilzeitfaktor
$$F = \frac{E(T_v)}{E(T_b)} = \frac{1}{1 - \rho}$$



ρ	0,4	$\xrightarrow{10\%}$	0,44
F		\rightarrow	1,79
ρ	0,9	\rightarrow	0,94
F	10	\rightarrow	16,7
ρ	0,9	\rightarrow	
F		\rightarrow	

– Herleitung der Bewertungsgrößen

Zustandsgraph



Zustandsgleichungen: „Fluß-Gleichgewicht“

$$\lambda p_0 = \mu p_1$$

Lösen des Gleichungssystems

$$p_1 =$$

$$p_2 =$$

Berechnen der Zustandswahrscheinlichkeiten

$$p_i = \rho^i \cdot p_0, \quad i \in \mathbb{N}, \quad \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

Berechnen von Bewertungsgrößen

$$E(N_v) =$$

$$E(N_b) =$$

$$E(T_v) =$$

$$\eta =$$

• **M/G/1/∞-System**

	M/M/1/∞	M/G/1/∞	
$E(T_w) =$	$\frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$	$\frac{\lambda \cdot E(T_b^2)}{2(1-\rho)}$	
$E(T_v) = E(T_w) + E(T_b) =$	$\frac{1}{\mu(1-\rho)}$	$\frac{\lambda \cdot E(T_b^2)}{2(1-\rho)} + E(T_b)$	
$E(N_w) = \lambda \cdot E(T_w) =$	$\frac{\rho^2}{1-\rho}$	$\frac{\lambda^2 \cdot E(T_b^2)}{2(1-\rho)}$	
$E(N_v) = E(N_w) + E(N_b) =$	$\frac{\rho}{1-\rho}$	$\frac{\lambda^2 \cdot E(T_b^2)}{2(1-\rho)} + \rho$	
$E(T_w^2) =$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2\rho}{\mu^2(1-\rho)^2} \\ \frac{2\rho}{\mu^2(1-\rho)^3} \\ \frac{2\rho}{\mu^2(1-\rho)^2(1-\frac{\rho}{2})} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\lambda \cdot E(T_b^2)}{3(1-\rho)} + \frac{(\lambda \cdot E(T_b^2))^2}{1-\rho} \\ E(T_{w,FIFO}^2) \cdot \frac{1}{1-\rho} \\ E(T_{w,FIFO}^2) \cdot \frac{1}{1-\frac{\rho}{2}} \end{array} \right.$	$\left\{ \begin{array}{l} \text{FIFO} \\ \text{LIFO} \\ \text{Random} \end{array} \right.$

Wartezeit-Verteilung für M/M/1/∞-FIFO:

$$F_{T_w}(t) = \mathbf{P}(T_w \leq t) = 1 - \rho \cdot e^{-(\mu-\lambda)t} \quad (t \geq 0)$$

- **M/M/k/∞-System**

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^{k-1} \frac{\rho^i}{i!} + \frac{\rho^k}{(k-1)!(k-\rho)} \right]^{-1}$$

$$E(N_w) = \frac{\rho^{k+1}}{(k-1)!(k-\rho)^2} \cdot p_0 \quad E(N_b) = \rho \quad \eta = \frac{\rho}{k}$$

- **M/G/k/0-System**

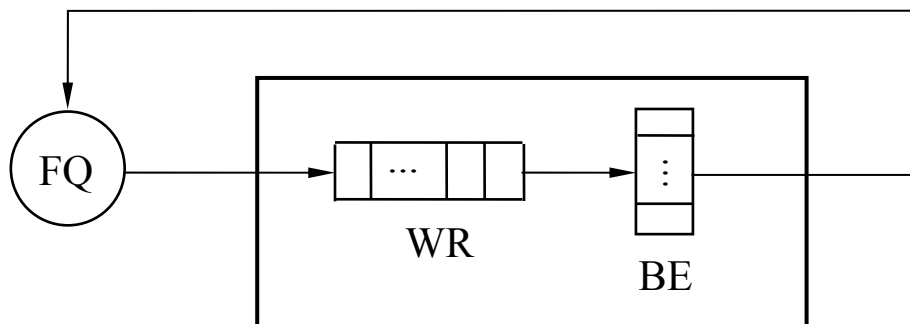
ERLANG 1908, СЕВАСТЬЯНОВ 1957

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^k \frac{\rho^i}{i!} \right]^{-1}$$

$$p_i = \frac{\rho^i}{i!} \cdot p_0 \quad \text{bzw.} \quad p_i = \frac{\rho}{i} p_{i-1} \quad i = 1, \dots, k$$

$$p_v = p_k = \frac{\rho^k}{k!} \cdot p_0 \quad E(N_b) = E(N_v) = \rho \cdot (1 - p_v)$$

- **Geschlossenes M/M/1/n-System**



T_q Quellverweilzeit

T_b Bedienungszeit

Für $k = 1$ gilt:

$$p_0 = \left[\sum_{i=0}^n \frac{n!}{(n-i)!} \cdot \rho^i \right]^{-1} \quad \text{mit} \quad \rho = \frac{ET_b}{ET_q}$$

$$p_i = \frac{n!}{(n-i)!} \cdot \rho^i p_0, \quad i = 1, \dots, n$$

2.4. Ausgewählte Scheduling-Strategien

- **Bewertungsmaß und Strategien**

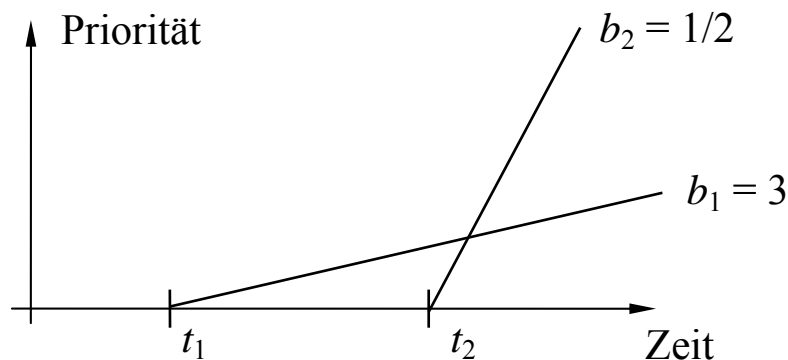
Abhängigkeit der mittleren Wartezeit $E(T_w)$ vom Bedienzeitwunsch b der Forderungen für die Strategien (ohne Entzug)

– *FIFO – LIFO – Random*

– *SJN (SPT) „Shortest Job Next“*

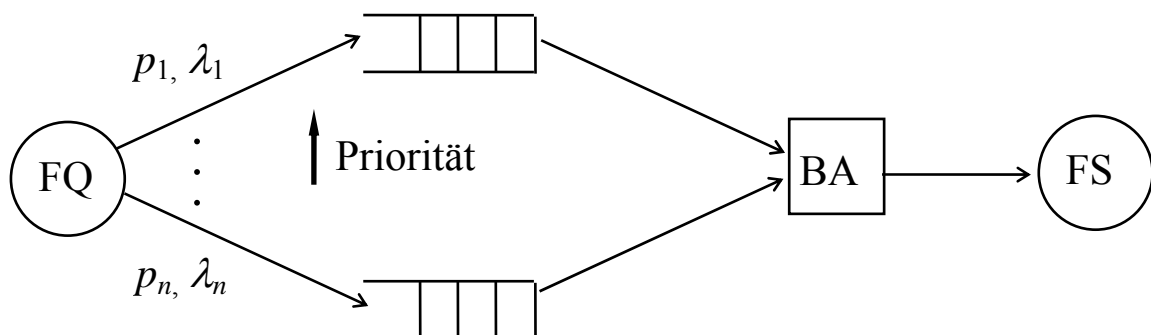
– *HRN „Highest Response Ratio Next“*

$$\text{Priorität} = \frac{\text{aktuelle Verweilzeit}}{\text{Bedienzeitwunsch}} = \frac{t - t_i}{b_i}$$



– *FEP „Fixed External Priorities“*

Aufträge werden in Prioritätsklassen eingeordnet; innerhalb einer Klasse FIFO, Bedienrate klassenunabhängig



- **Basis**

M/G/1/∞-Modell mit dynamischen Prioritäten

• **Ergebnisse**

– **SJN**

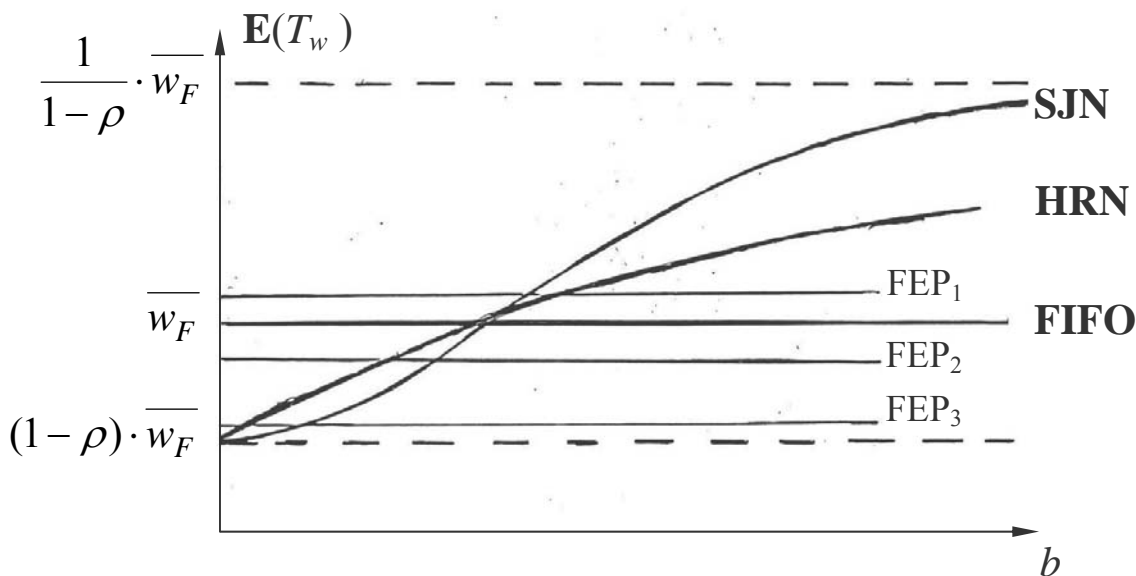
$$E(T_{w,SJN}) = \frac{\lambda \cdot E(T_b^2)}{2(1 - r(b))^2}, \quad r(b) = \lambda \cdot \int_0^b t \cdot f_{T_b}(t) dt$$

– **HRN**

$$E(T_{w,HRN})(b) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} \cdot E(T_b^2) + \frac{b}{2} \cdot \frac{\rho^2}{1 - \rho} & \text{für } b \leq \frac{E(T_b^2)}{E(T_b)} \\ \frac{\lambda}{2} \cdot \frac{E(T_b^2)}{1 - \rho} \cdot \left(1 - \rho + \lambda \cdot \frac{E(T_b^2)}{b}\right)^{-1} & \text{für } b > \frac{E(T_b^2)}{E(T_b)} \end{cases}$$

– **FEP**

$$E(T_{w,FEP})(i) = \frac{\rho / \mu}{(1 - \sigma_i)(1 - \sigma_{i-1})} \quad \text{mit } \sigma_0 = 0, \sigma_i = \sigma_{i-1} + \rho_i, \quad i = 1, \dots, n$$



- **Bewertung**

- FIFO: einfach. Gleichbehandlung aller Aufträge.
- SJN: Bevorzugung kürzerer Aufträge.
 \bar{t}_v wird bei $R = \emptyset$ minimal, falls alle b bekannt.
- HRN: größere Gerechtigkeit.
- FEP: statisch. Prioritätszuordnung?

Bei allen Strategien wird $E(T_w)$ durch

$$(1-\rho) \cdot E(T_{w,FIFO}) \quad \text{nach unten und durch}$$
$$(1-\rho)^{-1} \cdot E(T_{w,FIFO}) \quad \text{nach oben begrenzt.}$$

- RR: Gerechtigkeit.

- **Operationale Analyse**