4. Ratenmonotones Scheduling – Rate-Monotonic Scheduling (LIU/LAYLAND 1973)

4.1. Taskbeschreibung

- **Task**

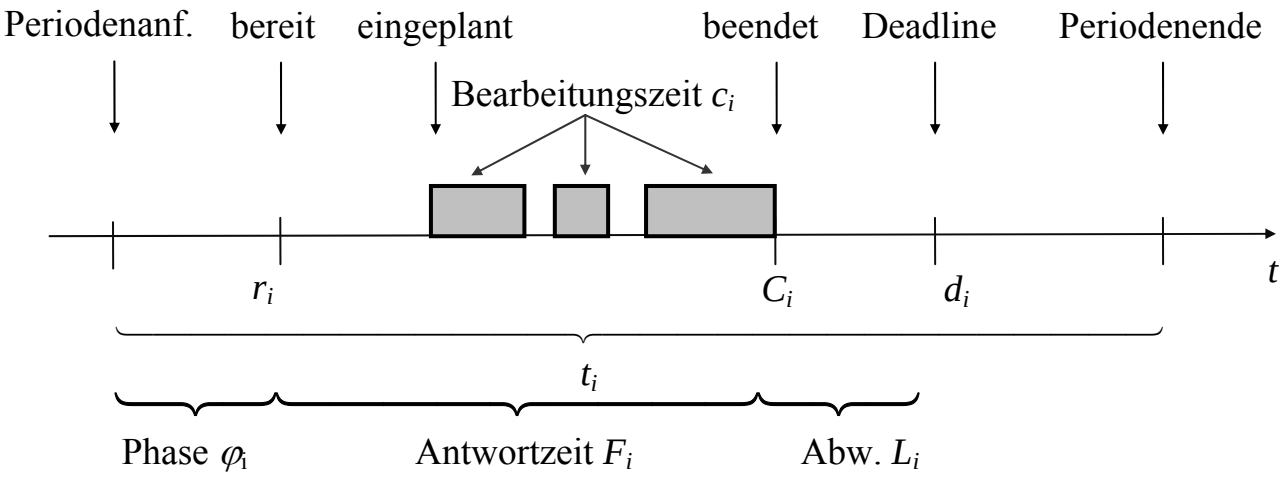
  Planungseinheit. Periodische Folge von Jobs. $T = \{\tau_1,...,\tau_n\}$

- **Taskparameter**

Anforderungszeit, Bereitzeit (release time)	r_i
Bearbeitungs-, Ausführungszeit (computation time)	c_i
Zeitschranke, Frist (deadline, due date)	d_i
Periodendauer	t_i
Phasenverschiebung (phase)	φ_i
Priorität	p_i

- **Bewertungsgrößen und Bewertungsmaße**

Beendigungszeitpunkt (completion time)	C_i	$\max(C_i) \rightarrow$ Min!
Antwortzeit (flow time)	$F_i = C_i - r_i$	$\overline{F}_i \rightarrow$ Min!
Deadline-Abweichung (lateness)	$L_i = C_i - d_i$	$L_i \quad 0 \ \forall i$
Deadline-Überschreitung (tardiness)	$T_i = \max(L_i, 0)$	$= 0 \ \forall \tau_i \in T$



4.2. Definitionen und Eigenschaften

- **Modellannahmen**

  (1) Anforderungen an Tasks sind periodisch mit konstanter Periodendauer t_i, d.h. mit konstanter Anforderungsrate $a_i = t_i^{-1}$.

  (2) τ_i ist bereit zu Periodenbeginn, Ausführungszeit c_i ist konstant (und höchstens gleich t_i).

  (3) Die Deadline einer Task ist gleich deren Periodenende.

  (4) Die Tasks sind voneinander unabhängig.

  (5) Das System-Scheduling erfolgt auf der Basis fester Prioritäten. Eine Task höherer Priorität verdrängt eine Task niedrigerer Priorität sofort, Overhead wird vernachlässigt.

- **Taskbeschreibung**

  τ_i: (t_i, c_i, p_i) $\quad i = 1,...,n$

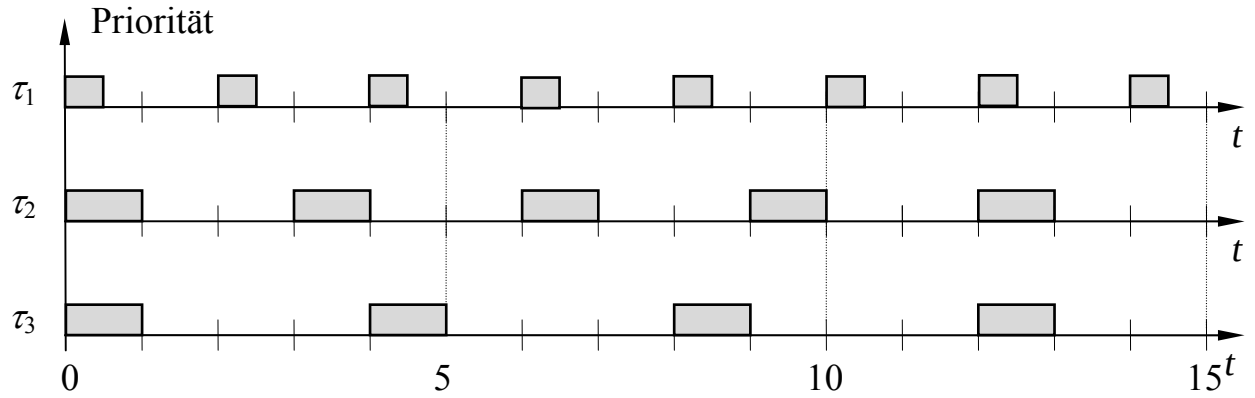
- **Kritischer Moment einer Task (critical instant)**

  Zeitpunkt, zu dem die Anforderung einer Task zu deren größtmöglicher Antwortzeit führt (falls Ausführung stets in derselben Periode beendet).

– ***Kritische Zeit*** einer Task (kritisches Intervall):

  Zeit zwischen kritischem Moment und Beendigung der Task.

– ***Beispiel 4.1.*** $t_1 = 2,\ t_2 = 3,\ t_3 = 4,\ c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = c_3 = 1;\ p_1 \succ p_2 \succ p_3.$



- **Satz 4.1.**

  Für eine Task tritt dann ein kritischer Moment ein, wenn die Task gleichzeitig mit allen Tasks höherer Priorität angefordert wird.

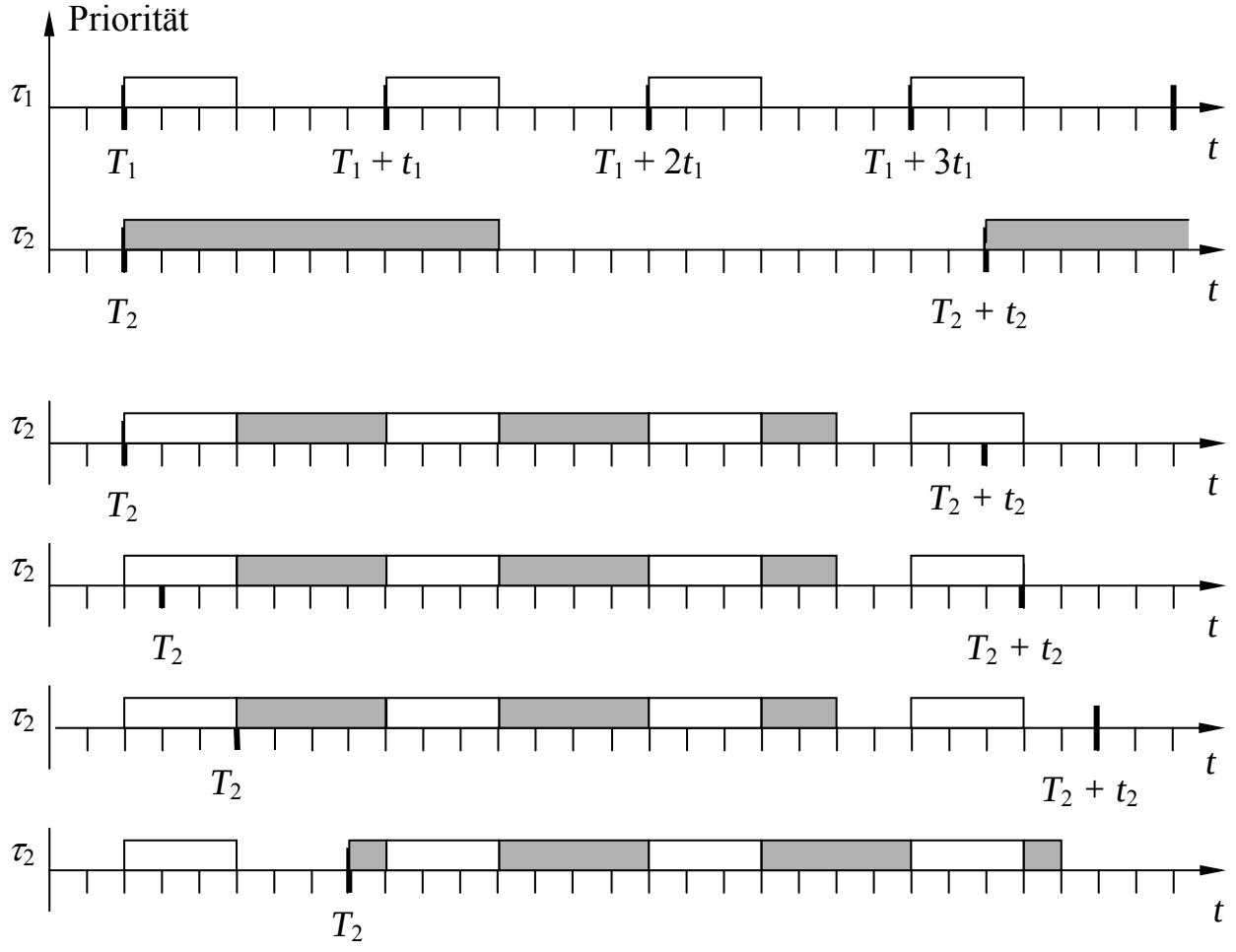
  Beweis (n = 2).

  Sei $p_1 \succ p_2$. Zur Zeit T_2 erfolge eine Anforderung an τ_2, und für τ_1 erfolge eine Anforderung zu den Zeiten

  $T_1 = T_2, \quad T_1 + t_1, \quad T_1 + 2t_1, \ldots$

  Dann erhöht sich die Antwortzeit von τ_2 um $\left\lceil \frac{c_2}{t_1 - c_1} \right\rceil \cdot c_1$.

  Weiter: Ein Vergrößern (oder Verkleinern) von T_2 läßt die Antwortzeit von τ_2 konstant oder verringert sie. □



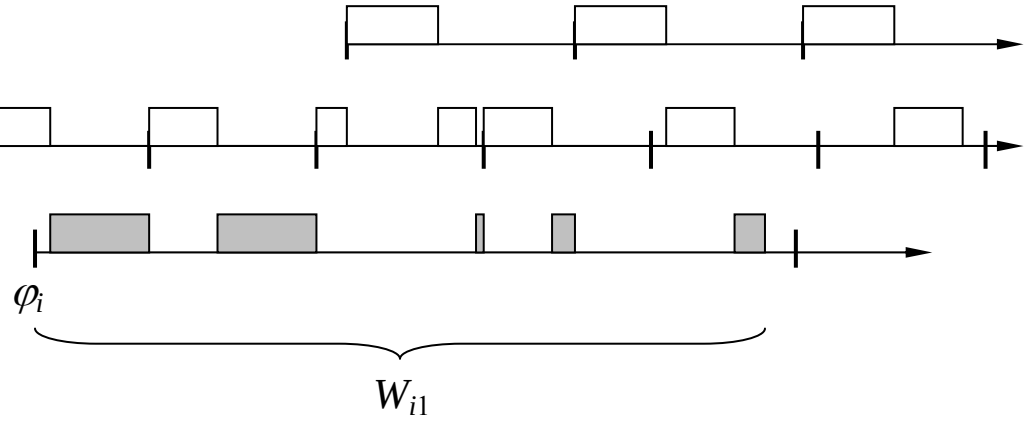
– Formal: Analyse des „Bedarfs an Prozessorzeit“ (time demand)

$$c_i + \sum_{k=1}^{i-1} \left\lceil \frac{W_{i1} + \varphi_i - \varphi_k}{t_k} \right\rceil \cdot c_k , \qquad W_{i1}\text{: Antwortzeit von } \tau_{i1}$$

Annahmen:

* $t = 0$ bei $\min_{k \le i}(\varphi_k)$
* bis φ_i kein Prozessor-Leerlauf
* Betrachtung der Antwortzeit W_{i1} des 1. Jobs τ_{i1} von Task τ_i.

Dann ist $\left\lceil \frac{W_{i1} + \varphi_i - \varphi_k}{t_k} \right\rceil$ die Anzahl der Aktivierungen von τ_k ($k < i$) bis zur Beendigung von τ_{i1}.



Damit ist W_{i1} die kleinste Lösung der Gleichung

$$W_{i1} = c_i + \sum_{k=1}^{i-1} \left\lceil \frac{W_{i1} + \varphi_i - \varphi_k}{t_k} \right\rceil \cdot c_k - \varphi_i .$$

W_{i1} wird maximal für $\varphi_k = 0 \;\; \forall\, k < i$ und somit auch für $\varphi_i = 0$.

– Weiter folgt: Die maximale Antwortzeit von τ_i ist die kleinste Lösung $t \in [0, t_i]$ der Gleichung

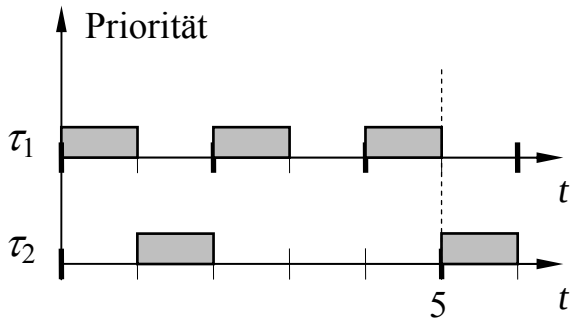
$$t = c_i + \sum_{k=1}^{i-1} \left\lceil \frac{t}{t_k} \right\rceil \cdot c_k .$$

– ***Folgerung 4.2.***

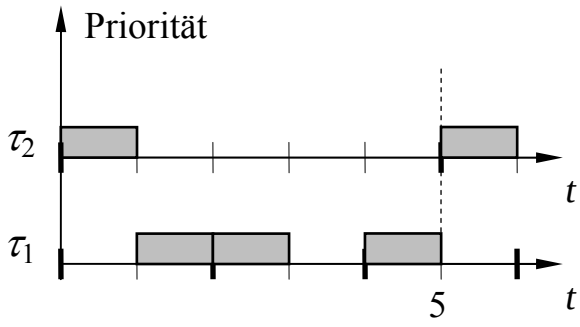
Für die Existenz eines Ablaufplans ist es hinreichend (und notwendig), daß alle Tasks, die in kritischen Momenten angefordert werden, ihre Deadline einhalten. Damit genügt es bei der Untersuchung der Ausführbarkeit eines Ablaufplans, die gleichzeitige Anforderung von Tasks zu betrachten.

– ***Beispiel 4.2.*** τ_1: $(2, 1, p_1)$, τ_2: $(5, 1, p_2)$.

a) $p_1 \succ p_2$:

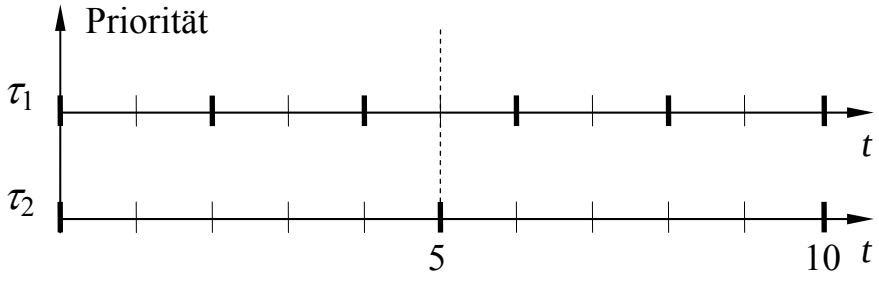


b) $p_2 \succ p_1$:



c) Modifikation:

$c_1 =$ (max.)



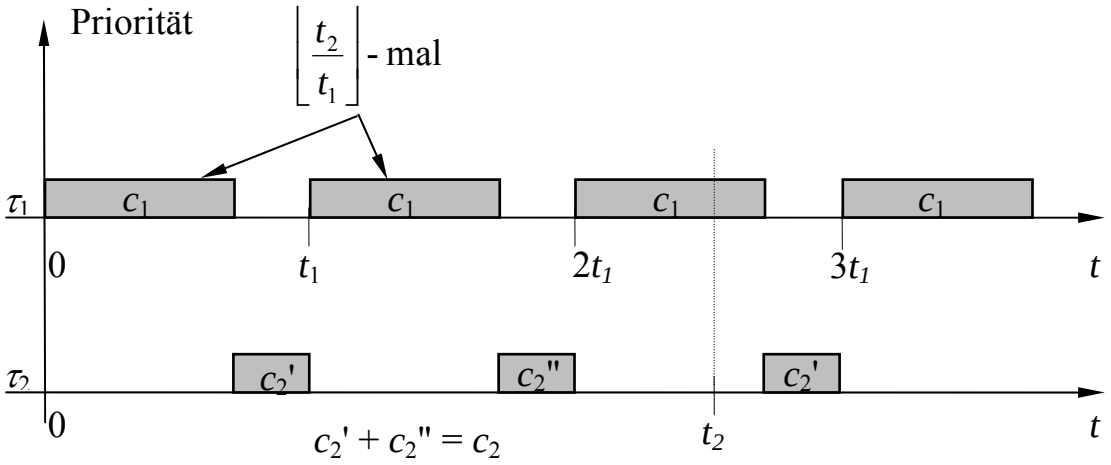
- **Lemma 4.3 (LIU/LAYLAND).**

  Sei $T = \{\tau_1, \tau_2\}$ mit $t_1 < t_2$. Gibt es einen ausführbaren Ablaufplan bei $p_2 \succ p_1$, so gibt es einen solchen Plan auch bei $p_1 \succ p_2$.

  Beweis.

  Notwendig (aber nicht hinreichend) für die Existenz eines Ablaufplans bei $p_1 \succ p_2$ ist mit $m = \left\lfloor \frac{t_2}{t_1} \right\rfloor$ die Bedingung (man beachte Folg. 4.2)

  $$mc_1 + c_2 \leq t_2 . \qquad (*)$$



  Sei nun $p_2 \succ p_1$. Dann muß offenbar gelten:

  $$c_1 + c_2 \leq t_1.$$

  Diese Bedingung impliziert wegen $m \geq 1$ Bedingung (*):

  $$mc_1 + c_2 \leq mc_1 + mc_2 \leq mt_1 \leq t_2.$$

- **Lemma 4.3.**

  Für $T = \{\tau_1,...,\tau_n\}$ sei eine statische Prioritätszuordnung p gegeben; o.B.d.A. sei $p(\tau_i) = i,\ i = 1,...,n$ (1: höchste Priorität). Weiter gebe es ein $k \in \{1,...,n-1\}$ mit $t_k > t_{k+1}$, und T sei unter diesen Bedingungen einplanbar. Dann ist T auch einplanbar, wenn die Prioritäten von τ_k und τ_{k+1} vertauscht werden.

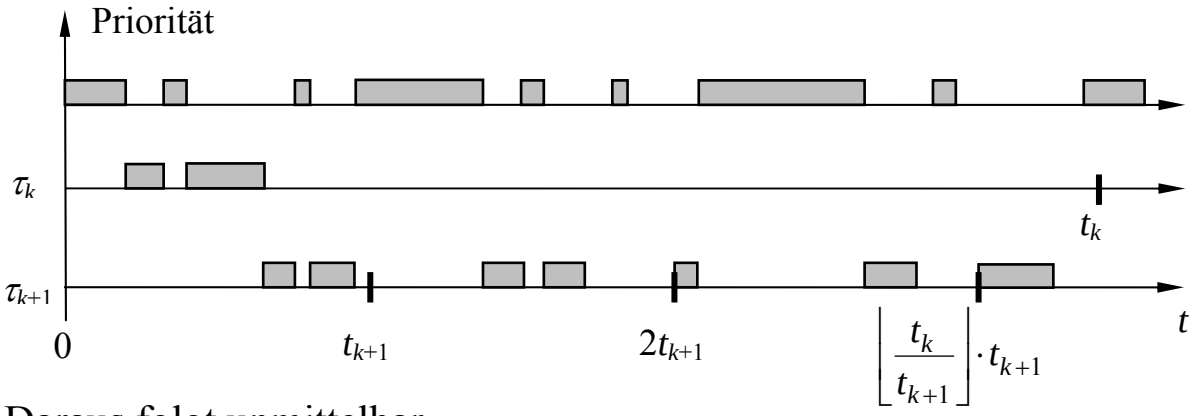
  Beweis.

  Sei $m = \left\lfloor \frac{t_k}{t_{k+1}} \right\rfloor$

  und $c_0 = \sum_{i=1}^{k-1} c_i^*$, c_i^*: Gesamtausführungszeit aller höher priorisierten τ_i in $[0, m \cdot t_{k+1}]$.

  Notwendig für die Einplanbarkeit von T bei p ist

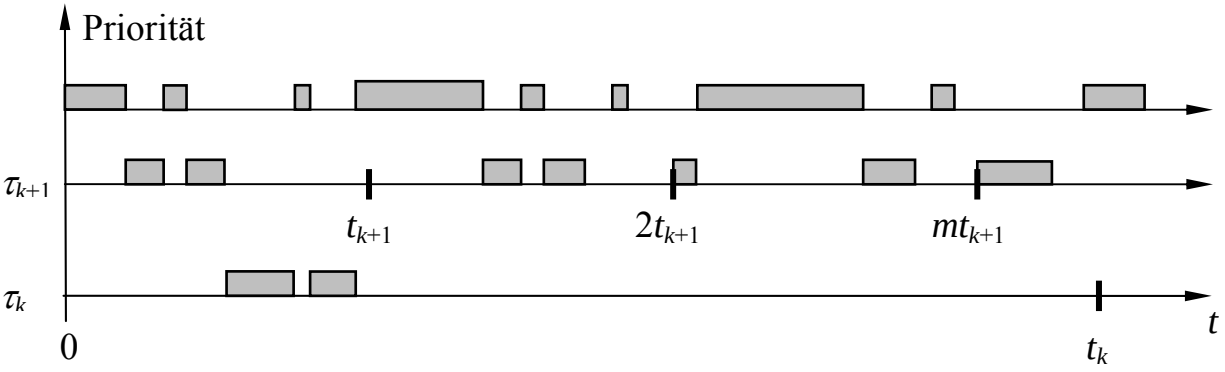
  $$c_0 + c_k + mc_{k+1} \le mt_{k+1}.$$



  Daraus folgt unmittelbar

  $$c_k \le m(t_{k+1} - c_{k+1}) - c_0,$$

  was (unter Beachtung von Folg. 4.2) hinreichend für die Einplanbarkeit von T nach Vertauschen der Prioritäten von τ_k und τ_{k+1} ist. ■



- **Ratenmonotone Prioritätszuordnung RMS**

  Den Tasks einer Taskmenge T wird eineindeutig eine Priorität in der Reihenfolge ihrer Anforderungsraten zugeordnet (höchste Rate entspricht höchster Priorität; bei gleicher Rate werden unterschiedliche, aber aufeinanderfolgende Prioritäten festgelegt).

- **Satz 4.4. (Optimalitätseigenschaft von RMS)**

  Sei T eine Taskmenge, und sei $\mathcal{S}(T)$ die Gesamtheit aller statischen Prioritätszuordnungen für T. Dann gilt: Gibt es irgendeine Zuordnung aus $\mathcal{S}(T)$, die zu einem ausführbaren Ablaufplan führt, so erzeugt auch RMS einen solchen Plan.

  Beweis.

  Sei

  $p\colon\ T \to \{1,..., n\}$ eineindeutig (1: höchste Priorität),

  so daß es einen Ablaufplan für T gebe. Weiter existiere ein

  $k \in \{1,...,n-1\}$ mit

  $t_k > t_{k+1},\quad p(\tau_k) \succ p(\tau_{k+1}),$

  und T sei unter diesen Bedingungen einplanbar. Dann ist nach Lemma 4.3 T auch einplanbar, wenn die Prioritäten von τ_k und τ_{k+1} vertauscht werden.

  RMS ist eine Permutation der ursprünglichen Prioritätszuordnung, jede Permutation läßt sich als Produkt von Transpositionen darstellen. ■

4.3. Prozessorauslastung und Existenz von Ablaufplänen – Admission-Kriterien für RMS

Gegeben sei eine Taskmenge $T = \{\tau_1,...,\tau_n\}$, $\tau_i : (t_i, c_i, p_i)$, $i = 1,...,n$.

- **Begriffe**

– ***Prozessorauslastung von T***

$$U = 1 - p_0 = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{t_i}$$ p_0: Stillstandswahrscheinlichkeit

– Eine Taskmenge T heißt ***gerade noch einplanbar*** *(fully utilizing the processor, difficult-to-schedule)*, wenn es für T bei der gegebenen Prioritätszuordnung einen ausführbaren Ablaufplan gibt, der jedoch bei Vergrößerung der Bearbeitungszeit einer Task nicht mehr ausführbar ist.

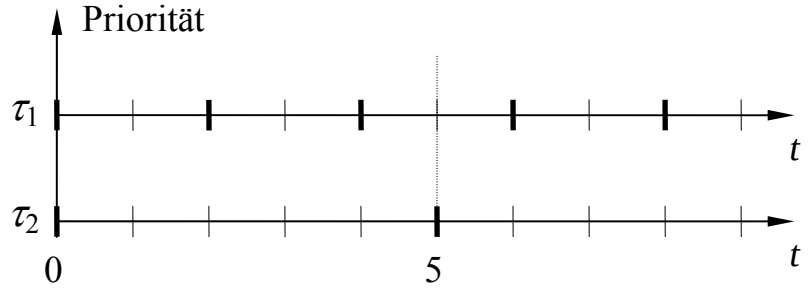
Aufgabe: Bestimmung eines Wertes U_g, so daß es für alle Taskmengen mit $U \le U_g$ stets einen Ablaufplan gibt. Da RMS optimal, genügt es, U_g bzgl. RMS zu bestimmen.

– ***Grenzauslastung, obere Grenze U_g der Prozessorauslastung (maximum schedulable utilization, utilization bound)***

Minimum von U über alle Taskmengen (über alle möglichen Werte von t_i und c_i), die bei RMS den Prozessor voll auslasten.

– ***Beispiel.*** ***4.2. c)*** $U =$

4.2. d) $t_1 = 2$ $c_1 = 0{,}9$ $t_2 = 5$ $c_2 = 2{,}5$ $U =$



- **Lemma 4.5.** Für zwei Tasks ist die obere Grenze U_g der Prozessorauslastung unter RMS

$$U_g = 2(\sqrt{2} - 1).$$

Beweis.

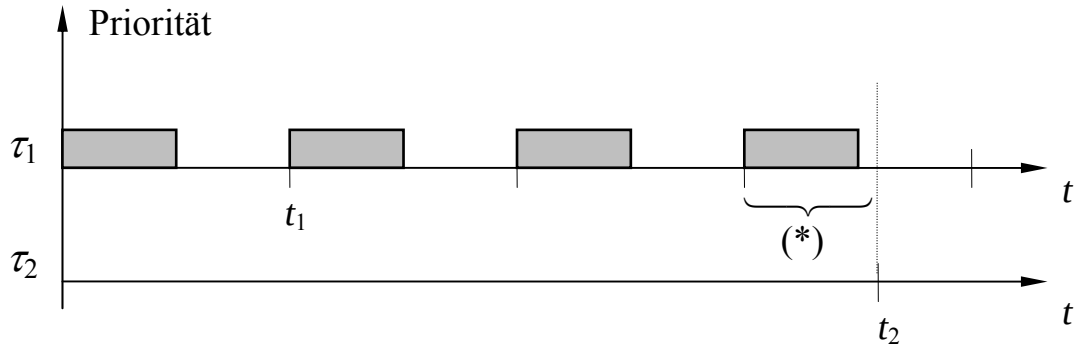
Sei $T = \{\tau_1, \tau_2\}$ eine Menge von zwei Tasks mit $t_1 < t_2$, mithin $p_1 \succ p_2$. Dann ist $I := [0, t_2)$ das kritische Intervall für τ_2.

In I treten $\left\lceil \frac{t_2}{t_1} \right\rceil =: l$ Anforderungen an τ_1 auf. Weiter sei $k := \left\lfloor \frac{t_2}{t_1} \right\rfloor$.

– ***Fall a):***

Alle in I auftretenden Anforderungen an τ_1 werden vollständig in I erfüllt. Das bedeutet (s. Abb.)

$$c_1 \le t_2 - kt_1. \qquad (*)$$



Dann lastet T den Prozessor genau dann voll aus, wenn

$$c_2 = t_2 - lc_1,$$

und damit ist

$$U = \frac{c_1}{t_1} + \left(\frac{t_2}{t_2} - l \cdot \frac{c_1}{t_2} \right) =$$

$$= 1 + c_1 \left(\frac{1}{t_1} - \frac{l}{t_2} \right), \qquad (a)$$

und wegen

$$l = \left\lceil \frac{t_2}{t_1} \right\rceil \geq \frac{t_2}{t_1}$$

folgt

$$\frac{l}{t_2} \geq \frac{1}{t_1}$$

und damit ist (a) monoton fallend in c_1.

– ***Fall b):***

Bei

$$c_1 \geq t_2 - kt_1$$

lastet T den Prozessor genau dann voll aus, wenn

$$c_2 = k(t_1 - c_1),$$

so daß

$$U = \frac{c_1}{t_1} + k \cdot \frac{t_1 - c_1}{t_2} =$$

$$= k \cdot \frac{t_1}{t_2} + c_1 \left(\frac{1}{t_1} - \frac{k}{t_2} \right). \qquad \text{(b)}$$

Dabei ist wegen $\lfloor x \rfloor \leq x$ der Faktor von c_1 nichtnegativ und somit U monoton steigend in c_1.

– ***Also:***

U_g tritt bei $c_1 = t_2 - kt_1$ auf, und dann gilt

$$U_g = 1 - \frac{t_1}{t_2} \left(l - \frac{t_2}{t_1} \right) \left(\frac{t_2}{t_1} - k \right).$$

Sei

$$r = \frac{t_2}{t_1} - k \neq 0 .$$

Dann ist

$$\frac{t_2}{t_1} = k + r , \qquad l = k + 1$$

und mithin

$$U_g = 1 - \frac{1}{k+r} \cdot (k+1-k-r) \cdot r =$$

$$= 1 - \frac{r(1-r)}{k+r} = f(k,r) \rightarrow \text{Min.!}$$

Da U_g monoton in k steigt und $k \in \mathbb{N}^+$ gilt, bedeutet dies

$$U_g = 1 - \frac{r(1-r)}{r+1} \rightarrow \text{Min.!}$$

Daraus resultiert

$$r = \sqrt{2} - 1$$

und schließlich

$$U_g = 2(\sqrt{2} - 1) .$$ q.e.d.

- **Satz 4.6 (LIU/LAYLAND, 1973).**

  Für eine Menge von n Tasks mit der Auslastung U gibt es einen Ablaufplan gemäß RMS, wenn $U \le U_g$ gilt mit

$$\boxed{U_g = U_g(n) = n\left(\sqrt[n]{2} - 1\right)}$$

  („obere Grenze der Prozessorauslastung“).

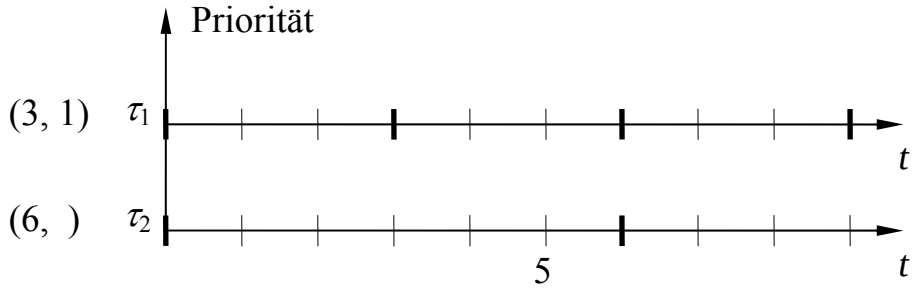
  $n = 2$: $U_g \approx 0{,}828$

  $n = 3$: $U_g \approx 0{,}780$

  $n \to \infty$: $U_g \to \quad \approx 0{,}693$.

- **Folgerung 4.7.**

  Ist $\frac{t_j}{t_i} \in \mathbb{N}$ für alle i, j mit $1 \le i \le j$, $i, j = 1,\ldots,n$, so gibt es genau dann einen Ablaufplan, wenn $\sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{t_i} \le 1$.



- **Struktur des Beweises für $n \geq 2$**

0. Es werden ausschließlich Taskmengen T betrachtet, die „gerade noch einplanbar“ sind (die den Prozessor voll auslasten, schwer einplanbar sind). Für diese Taskmengen wird die kleinstmögliche Auslastung bestimmt.

   o.B.d.A. sei T nach Periodenlängen geordnet, d.h. $t_1 < t_2 < ... < t_n$.

1. Sei $t_n \leq 2t_1$.

– Bei gegebenen t_i wird eine (spezielle) Taskmenge konstruiert, die gerade noch einplanbar ist.

– Bei gleichen t_i hat jede andere Taskmenge eine höhere Auslastung.

2. Die Auslastung der in 1. konstruierten Taskmenge ist abhängig von den Periodenlängen, genauer von den Periodenverhältnissen $\frac{t_{i+1}}{t_i}$. Für diese Taskmengen ist der kleinstmögliche Auslastungswert $U_n = n(\sqrt[n]{2} - 1)$.

3. T sei eine Taskmenge mit $t_n > 2t_1$.

– Konstruktion einer Taskmenge T': (t_i', c_i) für $i < n$, (t_n, c_n') mit $t_n \leq 2t_i'$ $\forall i \neq n$:

$$t_i' = (\lceil t_n / t_i \rceil - 1) \cdot t_i,$$

c_n': Summe aller „restlichen“ Bearbeitungszeiten.

Die Auslastung von T' ist nach 2. mindestens U_n.

– Die Auslastung der ursprünglichen Taskmenge T ist (echt) größer als die Auslastung von T'.

- **Beispiel 4.3.**

  $n = 2$

- **Verallgemeinerungen und Ergänzungen**

– $d_i < t_i$: RMS ist nicht mehr optimal. Aber: Zuordnung

Priorität $\sim d_i^{-1}$

ist optimal: ***Deadline-monotones Scheduling DMS***.

Einplanbarkeit: Satz 4.8, $t \in (0, d_i)$.

– $d_i > t_i$: weder raten- noch deadline-monotones Scheduling sind optimal.

– Multiframe tasks: τ: $(t, n, e^{peak}, e^{normal})$ $\rightarrow$ modifiziertes Kriterium

z. Bsp. $\tau = (5, 3, 4, 1)$: Ausführungszeiten $4 - 1 - 1 - 4 - 1 \ldots$

– **Satz 4.8 (LEHOCZKY, 1989).**

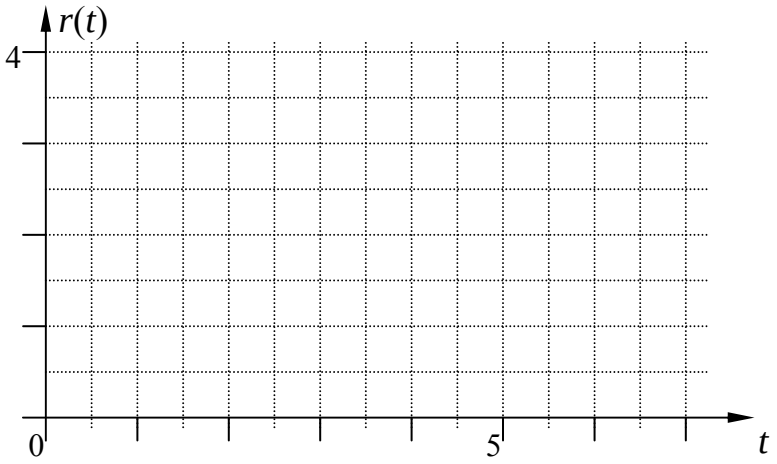
Sei $T = \{\tau_1, \ldots, \tau_n\}$ geordnet nach aufsteigender Periode. Dann gilt:
Für T gibt es genau dann einen Ablaufplan gemäß RMS, wenn

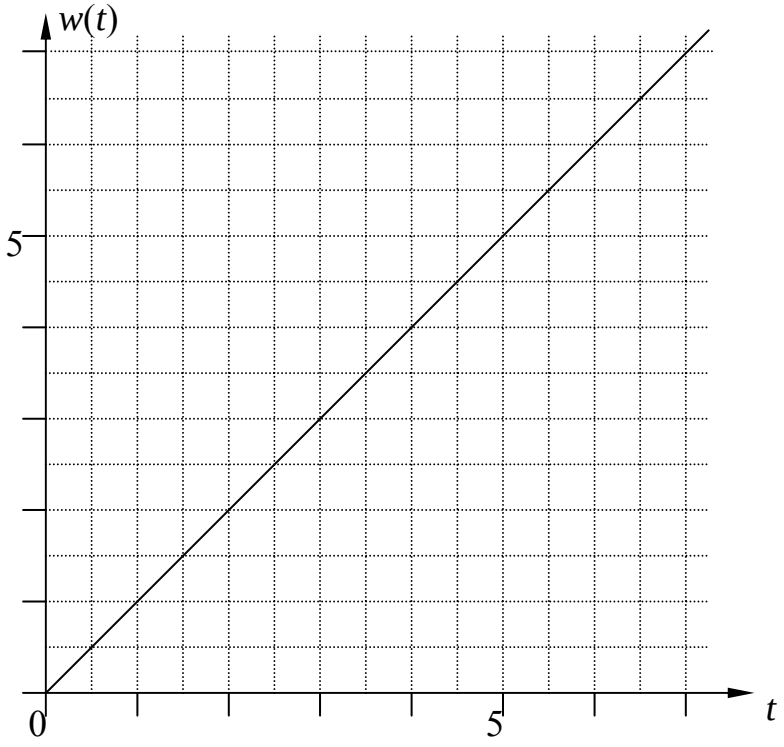
$$\max_{1 \le i \le n} \min_{t \in (0, t_i]} f_i(t) \le 1 \qquad \text{mit} \qquad f_i(t) = \frac{1}{t} \cdot \sum_{j=1}^{i} c_j \left\lceil \frac{t}{t_j} \right\rceil$$

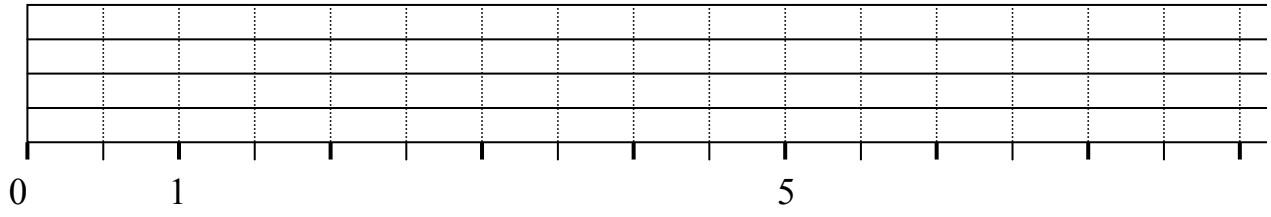
Analyse des Zeitbedarfs (time-demand analysis)

$$\textbf{?} \quad \underset{i=1,\ldots,n}{\forall i} \quad \underset{0<t\le t_i}{\exists t} \; : \quad w_i(t) = c_i + \sum_{j=1}^{i-1} \left\lceil \frac{t}{t_j} \right\rceil c_j \;\le\; t$$

Beispiel 4.4. $T = \{(2;\ 1),\quad (4;\ 0{,}5),\quad (5;\ 0{,}5),\quad (6;\ 1{,}5)\}$

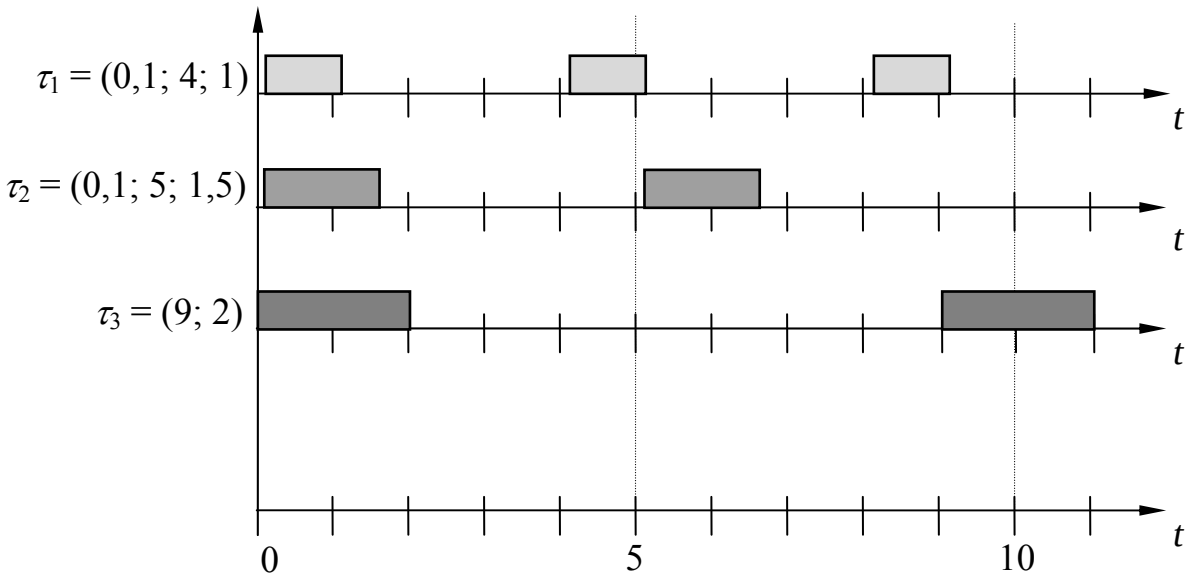






4.4. Blockierzeiten

- **Nicht-Unterbrechbarkeit (Nonpreemptibility)**



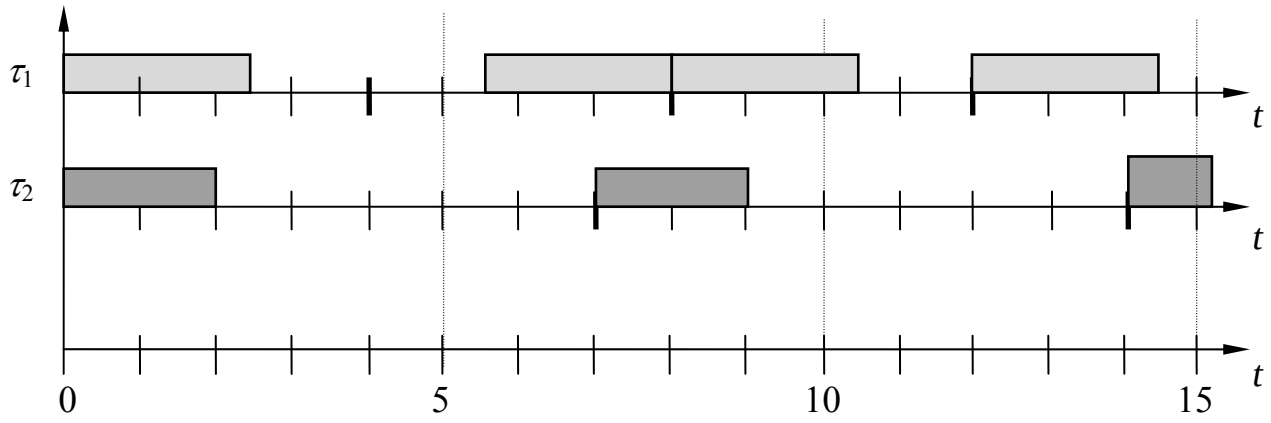
$b_i(nu)$: Blockierzeit von Task τ_i aufgrund von Nicht-Unterbrechbarkeit

$\theta_k(nu)$: längste Dauer der nichtunterbrechbaren Abschnitte von Job τ_k

$$b_i(nu) = \max_{i+1 \le k \le n} \theta_k(nu)$$

- **Selbstunterbrechung (Self-Suspension)**

  $\tau_1 = (4;\ 2{,}5\ [1{,}5])$ $\quad \tau_2 = (7;\ 2)$



  $b_i(su)$: Blockierzeit von Task τ_i aufgrund von Selbstunterbrechung

  $\theta_k(su)$: längste Selbstunterbrechungszeit eines Jobs von τ_k

$$b_i(su) = \theta_i(su) + \sum_{k=1}^{i-1} \min(c_k, \theta_k(su))$$

- **Admission**

  Einbeziehung der Gesamt-Blockierzeit b_i eines Jobs von τ_i:

$$b_i = b_i(su) + (k_i + 1)\cdot b_i(nu)$$

  k_i: maximale Anzahl von Selbstunterbrechungen der Jobs von τ_i

  Damit LIU/LAYLAND-Kriterium: $\quad \sum_{j=1}^{i} \frac{c_j}{t_j} + \frac{b_i}{t_i} \le U_g(i) \quad \forall i = 1,\ldots,n$

  Analyse des Zeitbedarfs: c_i ersetzen durch $c_i + b_i$

- **Kontextwechsel (Context Switches)**

  $\theta(kw)$: Dauer eines Kontextwechsels

  c_i ersetzen durch $c_i + 2\cdot\theta(kw)$ ohne Selbstunterbrechung

  c_i ersetzen durch $c_i + 2(k_i + 1)\cdot\theta(kw)$ mit Selbstunterbrechung