

Aufgaben zum Thema „Quantitative Methoden“

Q1. Eine Rechenanlage möge sich durch ein $M/M/1/\infty$ -System modellieren lassen. Die ankommenden Aufträge haben einen mittleren Abstand von 250 ms, die Bedienrate betrage 5/s.

- Erläutern Sie alle auftretenden Symbole und Größen!
- Wie lange verweilt ein Auftrag im System? Wieviele Aufträge warten durchschnittlich? 94/7

Q2*. Gegeben ist ein Prozeßsystem aus sieben Prozessen A,...,G mit der Präzedenzrelation (Abhängigkeiten) $\{(A,C), (A,D), (B,C), (B,E), (C,F), (D,G), (E,G)\}$ und folgenden Bedienungszeiten t :

Prozeß	A	B	C	D	E	F	G
t/s	2	3	1	2	3	2	1

- Stellen Sie die Abhängigkeiten einschließlich der Bedienungszeiten als Vorgangspfeilnetz dar!
- Geben Sie für den Fall, daß zwei gleichartige Prozessoren zur Verfügung stehen, einen Ablaufplan an, der zur minimalen durchschnittlichen Prozeß-Verweilzeit führt und gleichzeitig zu maximalem Durchsatz! Was stellen Sie fest? Berechnen Sie die entsprechenden Größen!
- Geben Sie die Informationen an, die der Aufgabe entnommen werden können, um im Falle nur eines Prozessors eine Modellierung durch ein $M/M/1/\infty$ -System vorzunehmen! Geben Sie weiter mindestens drei (wesentliche!) Argumente an, die aufgrund der vorliegenden Informationslage gegen eine derartige Modellierung sprechen! 96

Q3. Für ein zu projektierendes automatisches Auskunftssystem liegen folgende Informationen vor: Es wird damit gerechnet, daß im Mittel aller 2 Sekunden eine Auskunftsanforderung eintrifft, der Zeitabstand dazwischen kann als exponentiell verteilt angenommen werden. Die Bearbeitung der Aufträge erfolgt in der Reihenfolge ihres Eingangs, nicht sofort bearbeitbare Wünsche werden vorgemerkt. Weiter soll es möglich sein, mehrere Auskünfte gleichzeitig zu erteilen; die Auskunftserteilung dauert durchschnittlich 5 Sekunden.

Charakterisieren Sie das zugehörige Bedienungssystem mittels der KENDALLSchen Notation und weiterer relevanter Begriffe möglichst vollständig! 97/2

Q4. Die folgende Tabelle enthält für sechs Prozesse A,...,F innerhalb eines Beobachtungszeitintervalls von 21s den Zeitpunkt t_A , zu denen sie frühestens aktiviert werden können, ihre Bedienungszeit t_b und ihre Priorität p (1: niedrigste Priorität, bei gleicher Priorität FIFO). Die Prozesse dürfen nicht unterbrochen werden, die Kapazität des Warteraums kann als unbeschränkt angenommen werden.

Prozeß	A	B	C	D	E	F
t_A/s	0	2	3	8	10	13
t_b/s	5	2	6	2	2	1
p	1	1	3	2	5	2

- Stellen Sie die Anzahl der im System befindlichen Forderungen graphisch dar!
- Berechnen Sie die mittlere Verweilzeit sowie die durchschnittliche und maximale Warteschlangenlänge!
- Bestimmen Sie die für eine analytische Behandlung mittels eines $M/M/1/\infty$ -Systems erforderlichen Größen!
- Im Falle einer analytischen Behandlung gemäß c) weichen die Ergebnisse (z.T. erheblich) von den unter b) berechneten ab. Warum? 98/2

Q5. Angenommen, es wären die Voraussetzungen erfüllt, um zur Beschreibung des zeitlichen Verhaltens einer Festplatte ein $M/M/1/\infty$ -Modell zu verwenden; dabei dauere die Erledigung eines Plattenauftrags durchschnittlich 40ms, und es mögen durch eine Applikation im Mittel 15 Aufträge pro Sekunde an das Laufwerk abgesetzt werden.

- Was bedeuten diese Voraussetzungen im einzelnen? Inwieweit sind sie realistisch?
- Wie lange muß die Applikation durchschnittlich auf die Auftragserledigung warten?
- Zur Leistungssteigerung soll eine schnellere Platte eingesetzt werden, so daß die mittlere Antwortzeit nur noch 80ms beträgt. Um wieviel Prozent muß diese neue Platte schneller als die alte sein?

98/7

Q6. Erläutern Sie die Scheduling-Strategie SPT (Vorgehen, Voraussetzungen der Anwendbarkeit, Eigenschaften und Bedeutung)!

99/2

Q7.

- Erläutern und bewerten Sie die Scheduling-Strategie SPT (shortest processing time)!
- Warum spielt im deterministischen **Echtzeit**-Scheduling (d.h. bei periodischen Prozessen mit konstanter Bearbeitungszeit und Prioritäten, die den Prozessen unveränderlich zugeordnet werden) SPT keine Rolle? Geben Sie dazu als Beispiel zwei Prozesse durch ihre Perioden und Bearbeitungszeiten an, die sich gemäß SPT nicht einplanen lassen, wohl aber aufgrund dieser Werte garantiert nach einer anderen Strategie (welche Strategie ist das?)!

00/2

Q8. Ein Betriebssystem nehme von Applikationen Aufträge für eine Festplatte entgegen, indem es die Aufträge in eine Warteschlange einreicht und – sobald die Festplatte frei ist – den eigentlichen Plattenauftrag auslöst. Angenommen, es wären die Voraussetzungen erfüllt, um zur Beschreibung des zeitlichen Verhaltens ein $M/M/1/\infty$ -Modell zu verwenden; dabei dauere die Erledigung des Auftrags durch die Platte (Zugriffszeit) durchschnittlich 25ms, und es mögen durch die Applikationen im Mittel 30 Aufträge pro Sekunde an das Laufwerk abgesetzt werden.

- Inwieweit ist die Annahme eines $M/M/1/\infty$ -Modells für eine Festplatte gerechtfertigt?
- Wie groß ist die mittlere Antwortzeit des Systems?
- Zur Leistungssteigerung soll eine schnellere Platte eingesetzt werden, so daß die mittlere Antwortzeit nur noch 50ms beträgt. Um wieviel Prozent muß diese neue Platte schneller sein?
- Durch welche Maßnahmen kann die Zugriffszeit der Platte verringert werden?

00/8

Q9. In einem Echtzeitsystem sind periodische Tasks auf der Basis von statischen Prioritäten so einzuplanen, daß sie in jeder Periode erfolgreich beendet werden (d.h., das Periodenende ist die Deadline). Für vier Tasks T_1, \dots, T_4 liegen folgende Angaben vor (b_i : Bearbeitungszeit, p_i : Periodenlänge):

$$T_1: b_1 = 1, p_1 = 24; \quad T_2: b_2 = 1, p_2 = 4; \quad T_3: b_3 = 3, p_3 = 8; \quad T_4: b_4 = 2, p_4 = 6.$$

Ist es möglich, diese Tasks mittels RMS einzuplanen? Wenn nein, ist es dann auf andere Weise möglich, den Tasks Prioritäten statisch zuzuordnen, so daß alle Tasks stets erfolgreich sind? Sollte dies auch nicht möglich sein, können dann die vier Tasks überhaupt eingeplant, d.h. irgendwie so abgearbeitet werden, daß sie stets ihre Deadline einhalten?

01/2

Q10. In einem Echtzeitsystem sind periodische Tasks auf der Basis von statischen Prioritäten so einzuplanen, daß sie in jeder Periode erfolgreich beendet werden (d.h., das Periodenende ist die Deadline). Für vier Tasks T_1, \dots, T_4 liegen folgende Angaben vor (t_i : Bearbeitungszeit, p_i : Periodenlänge):

$$T_1: t_1 = 2, p_1 = 12; \quad T_2: t_2 = 2, p_2 = 48; \quad T_3: t_3 = 1, p_3 = 6; \quad T_4: t_4 = 1, p_4 = 4.$$

- a) Begründen Sie, daß diese Tasks mittels RMS eingeplant werden können! Wie lautet die Prioritätszuordnung?
- b) Ist dies auch möglich, wenn eine weitere Task $T_5: t_5 = 3, p_5 = 8$ einzuplanen ist? (Begründung!)
- c) Wenn nein, ist es dann auf andere Weise möglich, den Tasks Prioritäten statisch so zuzuordnen, daß alle Tasks stets erfolgreich sind? Wenn ja, wie lautet die Prioritätszuordnung; wenn nein, warum nicht?
- d) Sollten sich die fünf Tasks nicht mittels statischer Prioritäten einplanen lassen, können sie dann überhaupt eingeplant, d.h. irgendwie so abgearbeitet werden, daß sie stets ihre Deadline einhalten? Wenn ja, wie und warum?

Der Scheduling-Overhead werde in allen Fällen vernachlässigt.

02/2

Q11. Es werde angenommen, daß sich das Verhalten eines Rechensystems durch ein $M/M/k/\infty$ -System beschreiben läßt. Für ein Ein-Prozessor-System betrage die mittlere Bedienungszeit 20 ms, durchschnittlich treffen 75 Forderungen pro Sekunde ein.

- a) Wieso ist diese Situation kritisch?
- b) Welche Maßnahme zur Leistungssteigerung ist dann im Hinblick auf die mittlere Verweilzeit \overline{T}_v der Forderungen wirkungsvoller:
 - Verdoppeln der Kanalzahl k (d.h. Einbau eines zweiten, parallel arbeitenden Prozessors mit gleicher Taktfrequenz)
 - Verdoppeln der Bedienrate (d.h. Ersetzen des bisherigen Prozessors durch einen Prozessor mit doppelter Taktfrequenz)?

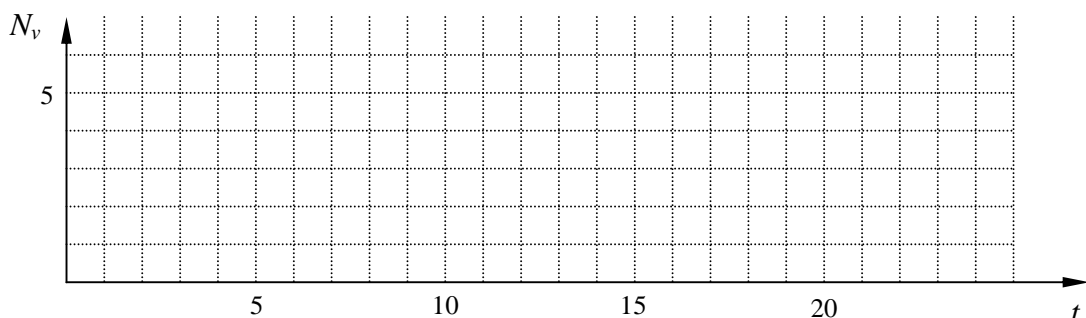
Hinweis. In einem $M/M/2/\infty$ -System gilt für die mittlere Wartezeit: $\overline{T}_w = \frac{\rho^2}{\mu(4 - \rho^2)}$ 03/3

Q12. 9

Die folgende Tabelle enthält für sechs Prozesse A,...,F innerhalb eines Beobachtungsintervalls von 21s den Zeitpunkt t_a , zu denen sie frühestens aktiviert werden können, ihre Bearbeitungszeit t_b und ihre Priorität p (1: niedrigste Priorität, bei gleicher Priorität FIFO). Es steht 1 Prozessor zur Verfügung, die Prozesse können unterbrochen werden, und die Kapazität des Warteraums kann als unbeschränkt angenommen werden.

Prozeß	A	B	C	D	E	F
t_a/s	0	2	3	8	10	13
t_b/s	5	2	6	2	2	1
p	1	1	3	2	5	2

- a) Stellen Sie die Anzahl der im System befindlichen Forderungen in nachfolgendem Diagramm graphisch dar! Markieren Sie den Ankunfts- und Beendigungszeitpunkt jedes Prozesses!



- b) Berechnen Sie die mittlere Verweilzeit sowie die durchschnittliche und maximale Warteschlangenlänge bzgl. des Beobachtungsintervalls!
- c) Bestimmen Sie die für eine analytische Behandlung mittels eines M/M/1/∞-Systems erforderlichen Größen! Geben Sie zwei Argumente an, die im vorliegenden Fall für eine derartige Modellierung sprechen, und zwei Argumente, die dagegen sprechen! Welche Argumente haben das größere Gewicht? 03/8

Q13. Betrachtet werde folgende Schedulingstrategie in einem Echtzeitsystem. Es werden periodische, voneinander unabhängige Tasks mit konstanter Bearbeitungszeit auf der Basis fester Prioritäten eingeplant. Das Periodenende ist zugleich Deadline, die Tasks sind unterbrechbar. Die Prioritäten werden folgendermaßen zugeteilt: je kürzer die Bearbeitungszeit ist, desto höher ist die Priorität (bei gleicher Bearbeitungszeit werden unterschiedliche Prioritäten zugeordnet). Diese Zuordnung ist allerdings nicht optimal bzgl. Einplanbarkeit mittels statischer Prioritäten.

- a) Was bedeutet diese Aussage?
- b) Begründen Sie dies anhand von zwei Prozessen (Angabe von Periodenlänge und Bearbeitungszeit sowie entsprechende Ablaufpläne)! 03/8

Q14. In einem Echtzeitsystem sind mehrere periodische Tasks auf der Basis statischer Prioritäten so einzuplanen, daß jede Task in jeder Periode erfolgreich beendet werden kann. Die Tasks sind voneinander unabhängig und jederzeit unterbrechbar. Die Untersuchung habe ergeben, daß eine erfolgreiche Einplanung mit RMS nicht möglich ist, obwohl die Gesamtauslastung der Tasks unter 1 liegt.

- a) Wie groß ist dann die Gesamtauslastung der Taskmenge mindestens? Begründung!
- b) Jemand schlägt vor, die Prioritäten nicht nach Periodenlänge zu ordnen, sondern nach Bearbeitungszeit, und zwar einerseits aufsteigend, andererseits absteigend, und dann die Einplanbarkeit der Taskmenge zu untersuchen. Wie beurteilen Sie diese beiden Vorschläge? 04/3

Q15. In einem Echtzeitsystem sollen Tasks unter den üblichen Voraussetzungen (periodisch, unterbrechbar, unabhängig, Deadline gleich Periodenende, Vernachlässigung des Scheduling-Overheads) auf der Basis statischer Prioritäten eingeplant werden. Dazu wird folgendes Verfahren vorgeschlagen:

(1) Berechne $v_i = \frac{e_i}{t_i}$ e_i : Ausführungszeit, t_i : Periodendauer

(2) Sortiere Tasks gemäß v_i aufsteigend.

(3) Ordne den Tasks statische Prioritäten absteigend zu (d. h. kleinstes v_i bedeutet höchste Priorität).

- a) Wie könnte man diese Strategie nennen (analog zu Bezeichnungen wie SPT oder EDF)?
- b) Leistet diese Strategie bzgl. Einplanbarkeit mehr als die Strategie RMS, d.h. gibt es Taskmengen, die auf diese Weise eingeplant werden können, nicht aber durch RMS?
- c) Leistet diese Strategie wenigstens genausoviel wie RMS? Begründungen! 04/8

Q16. Für einen zu projektierenden Server liegen die folgenden Informationen vor. Der Ankunftsprozeß läßt sich als POISSON-Prozeß betrachten, wobei zu erwarten ist, daß im Mittel pro Minute 150 Anforderungen eintreffen. Die Dauer für die Bearbeitung einer Anforderung beträgt durchschnittlich 3 Sekunden, sie kann als exponentiell verteilt angenommen werden. Die Be-

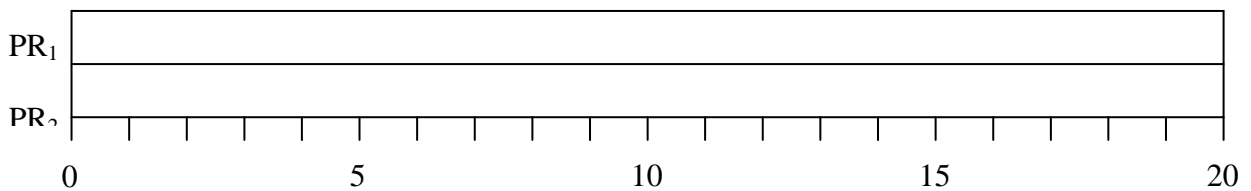
arbeitung der Anforderungen erfolgt in der Reihenfolge ihres Eingangs, ein Vormerken von nicht sofort bearbeitbaren Aufträgen ist jedoch nicht möglich. Allerdings soll eine bestimmte, noch festzulegende Anzahl von Anforderungen gleichzeitig erledigt werden können.

- a) Charakterisieren Sie das zugehörige Bedienungssystem mittels der KENDALLSchen Notation möglichst vollständig! (Begründungen!)
- b) Aller wieviel Millisekunden trifft durchschnittlich eine Anforderung ein?
- c) Geben Sie den Verkehrswert ρ an! Welchen Schluß läßt dieser Wert zu? 04/8

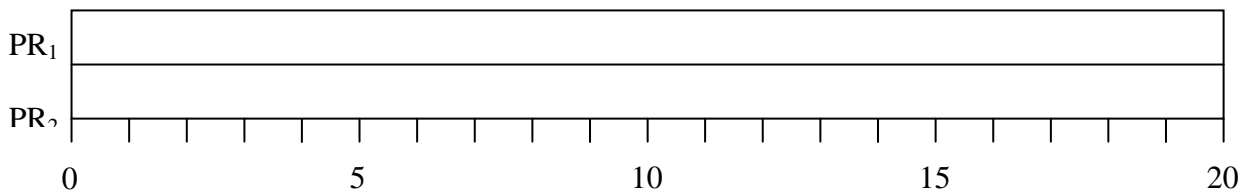
Q17. Gegeben sei ein System aus fünf unabhängigen Jobs A,...,E mit einer Bearbeitungszeit (in dieser Reihenfolge) von 7, 5, 9, 6, 3 Zeiteinheiten. Es stehen 2 Prozessoren PR₁, PR₂ zur Verfügung.

- a) Tragen Sie in die nachfolgenden Diagramme die Bearbeitungsreihenfolge für die Schedulingstrategien SPT und LPT ein und bestimmen Sie jeweils die mittlere Wartezeit der Jobs!

SPT: $\bar{t}_w =$



LPT: $\bar{t}_w =$



- b) Welche Optimalitätskriterien sind unter den gegebenen Voraussetzungen relevant? Inwieweit erfüllen die beiden Ablaufpläne diese Kriterien? (Begründungen!) 05/8

Q18. Wenn die Einplanbarkeit einer Taskmenge T mittels RMS durch Aufstellen eines Ablaufplans untersucht werden muß, so können leicht relativ lange (und damit unhandliche) Ablaufpläne entstehen. Daher schlägt jemand vor, die Task T_n mit der längsten Periode durch eine Task T_n' mit einer kürzeren Periode zu ersetzen – wodurch sich aber die Prioritätszuordnung nicht ändern soll – und die Ausführungszeit von T_n so anzupassen, daß T_n' zu derselben Auslastung wie T_n führt; die entstehende Taskmenge sei T' . Die Behauptung lautet dann: „Mittels RMS ist die Taskmenge T genau dann einplanbar, wenn es T' ist.“

- a) Untersuchen Sie die Gültigkeit dieser Behauptung! Benutzen Sie dazu als Beispiel die Taskmenge $T = \{T_1 = (5; 7), T_2 = (6; 24)\}$; dabei bezeichnet der erste Parameter die Ausführungszeit und der zweite Parameter die Periodendauer; die Tasks mögen die üblichen Voraussetzungen für RMS erfüllen.
- b) Warum ist eine Periodendauer von 15 für T_1 (alle anderen Werte unverändert) von vornherein nicht zur Untersuchung des Problems geeignet?

Hinweis. Ist zur Untersuchung der Einplanbarkeit einer Taskmenge mittels RMS ein Ablaufplan erforderlich, so genügt es, das Intervall $[0, t]$ zu betrachten, sofern alle Tasks zum Zeitpunkt 0 gestartet werden (t : Periodendauer der Task mit der niedrigsten Priorität). 06/3 \approx 07/8

Q19. In einem Einprozessorsystem sind periodische Tasks so einzuplanen, daß jede Task in jeder Periode vollständig ausgeführt werden kann. Die Tasks sind voneinander unabhängig und jederzeit unterbrechbar. Betrachtet werde folgende Taskmenge (e_i : Ausführungszeit, p_i : Periodendauer):

$$T_1: e_1 = 3, p_1 = 6; \quad T_2: e_2 = 1, p_2 = 4; \quad T_3: e_3 = x, p_3 = 8.$$

- Bestimmen Sie den größtmöglichen Wert von x , bei dem die Taskmenge unter Anwendung der Strategie EDF eingeplant werden kann! Der Scheduling-Overhead werde dabei vernachlässigt.
- Geben Sie in nachfolgendem Diagramm den Ablaufplan (Schedule) an, der aus der Anwendung von EDF für die drei Tasks resultiert, wobei möglichst wenig Kontextwechsel (Prozeßumschaltungen) auftreten sollen (der Übersichtlichkeit halber sind die Tasks einzeln einzuzichnen). Für x ist dabei der in a) berechnete Wert zu verwenden.

	0				5					10					15				
T_1																			
T_2																			
T_3																			

- Ist es möglich, diese Tasks auch auf der Basis irgendeiner statischen Prioritätszuordnung einzuplanen, wenn $x = 1,5$ gilt (die Gesamtauslastung beträgt dann 93,25%)? Wenn ja, so geben Sie diese Zuordnung an; wenn nein, so begründen Sie dies! 06/8

Q20. Die Taskmenge T bestehe aus den folgenden Tasks (e_i : Ausführungszeit, p_i : Periodendauer):

$$T_1: e_1 = 3, p_1 = 6; \quad T_2: e_2 = 5, p_2 = 500; \quad T_3: e_3 = 1, p_3 = 5.$$

Die Tasks mögen die Voraussetzungen für RMS erfüllen.

- Ist T mittels ratenmonotoner Prioritätszuordnung einplanbar?
- RMS hat unter den erwähnten Voraussetzungen die Eigenschaft, optimal bzgl. Einplanbarkeit in der Klasse aller statischen Prioritätsverfahren zu sein. Was bedeutet diese Aussage?
- Zu den Voraussetzungen gehört, daß die Tasks unterbrechbar sind (und damit preemptives Scheduling ermöglichen). Untersuchen Sie, ob die Taskmenge T mittels RMS oder einer anderen statischen Prioritätszuordnung auch dann einplanbar ist, wenn dies *nicht* erfüllt ist. Welchen Schluß hinsichtlich der Optimalität von RMS unter dieser modifizierten Bedingung ziehen Sie daraus? 07/2

Q21. Gegenstand der folgenden Aufgabe sind voneinander unabhängige, unterbrechbare periodische Tasks mit konstanter Periodendauer t und konstanter Bearbeitungszeit e , die auf einem Prozessor vom gemeinsamen Startzeitpunkt 0 an mittels statischen Prioritäten ausgeführt werden sollen. Bekanntlich ist dann nicht jede solche Taskmenge einplanbar (so daß alle Deadlines aller Tasks eingehalten werden), selbst wenn die Auslastung der Taskmenge 100% nicht übersteigt.

Betrachtet werde die aus den Tasks $T_1: e_1 = 1, t_1 = 4; \quad T_2: e_2 = x, t_2 = 10$ bestehende Taskmenge T .

- Geben Sie den aus einem analytischen Kriterium resultierenden größten ganzzahligen Wert von x an, so daß T mit Sicherheit einplanbar ist!
- Wenn die Einplanbarkeit nicht mittels eines analytischen Kriteriums entschieden werden kann, so genügt es, einen Ablaufplan (Schedule) bis zu einem bestimmten Zeitpunkt H zu erstellen. Wie groß ist H im vorliegenden Fall, wie groß im allgemeinen Fall? (Begründung!)

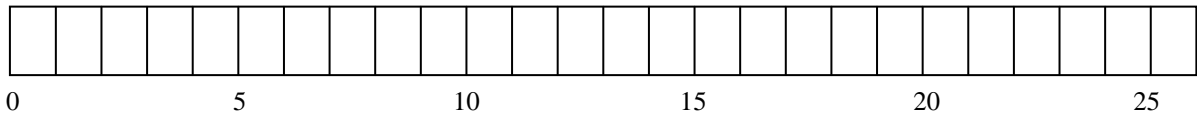
- c) Um im Fall b) die Länge der zu untersuchenden Ablaufpläne zu verkürzen, schlägt jemand vor, die Task T mit der längsten Periode proportional zu verringern (also e und t durch dieselbe natürliche Zahl k zu teilen), wobei allerdings die entstehende Task T' immer noch die längste Periode innerhalb der gegebenen Taskmenge haben soll. Untersuchen Sie dieses Vorgehen anhand des gegebenen Beispiels für den Fall $x = 7!$ Bewerten Sie den Vorschlag!
- d) Welches ist der größtmögliche Wert von x , so daß eine Einplanung auf irgendeine Art (nicht notwendig mittels statischen Prioritäten) möglich ist? 08/2

Q22. Betrachtet werden periodische Tasks mit konstanter Ausführungszeit, deren Periodenende zugleich die Deadline ist.

- a) Unter bestimmten Voraussetzungen ist dann EDF optimal bzgl. Einplanbarkeit. Was bedeutet diese Aussage? Welches sind die weiteren Voraussetzungen?
- b) Diese Optimalitätseigenschaft gilt beispielsweise nicht mehr, wenn Tasks nicht verdrängbar (nicht unterbrechbar) sind. Zeigen Sie dies an dem folgenden Beispiel (t_i : Bearbeitungszeit, p_i : Periodendauer):

T_1 : $t_1 = 4, p_1 = 8$, Task nicht verdrängbar; T_2 : $t_2 = 1, p_2 = 3$, Task verdrängbar.

Einplanung gemäß EDF:



erfolgreiche Einplanung:



09/3, 08/8