

# Grenzwerte der Zuverlässigkeit von Parallel-Serien-Systemen

Andreas Pfitzmann, Hermann Härtig

Institut für Informatik IV, Universität Karlsruhe  
7500 Karlsruhe, Postfach 6380

## Zusammenfassung

Es werden notwendige Bedingungen dafür hergeleitet, daß sich Systeme durch mehrfache Auslegung von Komponenten des nichtredundanten Systems unter Beibehaltung seiner Verbindungsstruktur (Parallel-Redundanz) beliebig zuverlässig bauen lassen. Unter der Annahme perfekter Fehlererkennung (und gegebenenfalls Umschaltung) werden auch hinreichende Bedingungen angegeben.

Die Zuverlässigkeitsmodellierung von Systemen mit Parallel-Redundanz erfolgt durch Parallel-Serien-Systeme, um die gegenseitige Zuverlässigkeitsreduktion von Komponenten durch ihre parallel-redundante Auslegung zu beschreiben. Das Zuverlässigkeitsverhalten von Parallel-Serien-Systemen bei zunehmender Größe wird mit Hilfsmitteln aus der Analysis untersucht. Aus diesen Untersuchungen folgen notwendige bzw. hinreichende Bedingungen zur Erzielung beliebiger Systemzuverlässigkeit durch Parallel-Redundanz.

## Schlagwörter

Parallel-Redundanz, Parallel-Serien-Schaltung, Parallel-Serien-System, Redundanz, Zuverlässigkeitsanforderung, Zuverlässigkeitsmodellierung, gegenseitige Zuverlässigkeitsreduktion durch Parallel-Redundanz

## 1 Problemstellung

Vielfach besteht ein Problem bei der Einführung redundanter Systemkonfigurationen darin, daß zusätzliche Kopeleinrichtungen notwendig werden, die ihrerseits die Zuverlässigkeitsgewinne vermindern oder gar eine Zuverlässigkeitsreduktion herbeiführen.

Für eine spezielle Klasse von Redundanz (Parallel-Redundanz), die im einführenden Beispiel (Abschnitt 2) anschaulich eingeführt und in Abschnitt 3 definiert ist, wird die Zuverlässigkeit von Systemen in Abhängigkeit vom Redundanzgrad beschrieben.

Danach wird untersucht, unter welchen Bedingungen sich Systeme durch Parallel-Redundanz beliebig zuverlässig bauen lassen.

Dabei darf die Zuverlässigkeitsreduktion von (System-) Komponenten durch die parallel-redundante Auslegung von anderen (System-) Komponenten nicht vernachlässigt werden, wie dies etwa in [Gaed\_77] in Bezug auf die Verbindungsleitungen beliebig vieler Dioden getan wird. Die Überlebenswahrscheinlichkeit jeder Komponente und damit auch jedes endlichen Systems strebt für  $t \rightarrow \infty$  gegen 0. Also ist es für eine Untersuchung, unter welchen Bedingungen sich Systeme durch Parallel-Redundanz beliebig zuverlässig bauen lassen, zweckmäßig, zeitunabhängige Zuverlässigkeitskenngrößen zu verwenden. Anders als in der DIN Norm 40041 stehe Zuverlässigkeit im folgenden für eine beliebige zeitunabhängige Zuverlässigkeitskenngröße, (z. B. die Überlebenswahrscheinlichkeit bis zu einem festen Zeitpunkt oder aber bei Reparatur die zeitunabhängige Verfügbarkeit).

Statistische Unabhängigkeit von Ausfällen (und gegebenenfalls der Reparaturen) sowie perfekte Fehlererkennung (und gegebenenfalls Umschaltung) werden vorausgesetzt.

## 2 Ein einfaches Rechensystem als einführendes Beispiel

### 2.1 Zuverlässigkeitsmodellierung

Gegeben sei ein nichtredundantes Rechensystem, das aus einem Rechner, einem Buskoppler sowie einem (externen) Bus (etwa als Schnittstelle für Terminals, Drucker etc.) besteht (Bild 1).

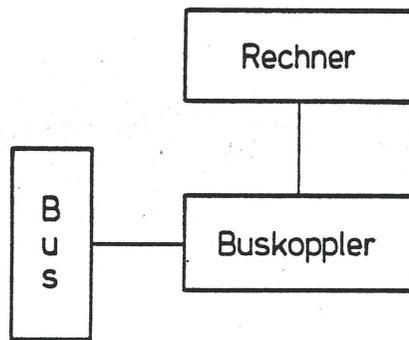


Bild 1: Nichtredundantes Rechensystem

Der Buskoppler kann durch seinen Ausfall Rechner und/oder Bus stören. Um die Zuverlässigkeitsmodellierung zu erleichtern, wird im folgenden angenommen, daß der Buskoppler gedanklich aus 2 Teilen besteht, der Rechner-Schnittstelle (RS) und der Bus-Schnittstelle (BS) (Bild 2). Bei Ausfall der Rechner-Schnittstelle werde allein der Rechner, bei Ausfall der Bus-Schnittstelle allein der Bus gestört. Die Rechner-Schnittstelle bestehe unter anderem aus Steuerschaltungen, Treibern und Stecker zum rechnerinternen Bus, die Bus-Schnittstelle unter anderem aus Steuerschaltungen, Treibern und Stecker zum (externen) Bus. Damit ergibt sich für das nichtredundante Rechensystem als Zuverlässigkeitsschaltbild [Gaed\_77, Höfl\_78] Bild 3.

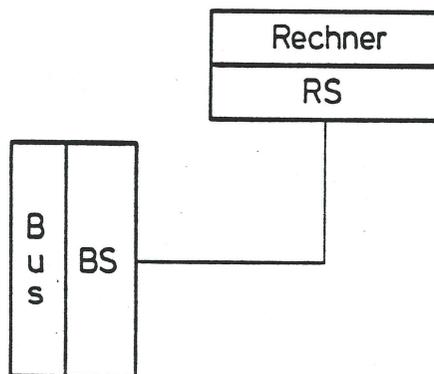


Bild 2: Nichtredundantes Rechensystem mit Schnittstellen



Bild 3: Zuverlässigkeitsschaltbild des nichtredundanten Rechensystems mit Schnittstellen

Um die Zuverlässigkeit zu erhöhen, werde Parallel-Redundanz bei der vermutlich unzuverlässigsten Komponente, dem Rechner, eingeführt (Bild 4). Dies erhöht die Zahl der Busanschlüsse, was die Zuverlässigkeit

des Busses reduziert. Die Zuverlässigkeit des Busses bei mehreren Busanschlüssen läßt sich durch ein Serien-System aus Bus und Bus-Schnittstellen modellieren. Das Zuverlässigkeitsschaltbild des rechner-redundanten Rechensystems (Bild 5) zeigt, daß sich dadurch auch für große Rechner-Anzahlen keine höhere Zuverlässigkeit erzielen läßt, als sie das Serien-System aus Bus und Bus-Schnittstellen besitzt.

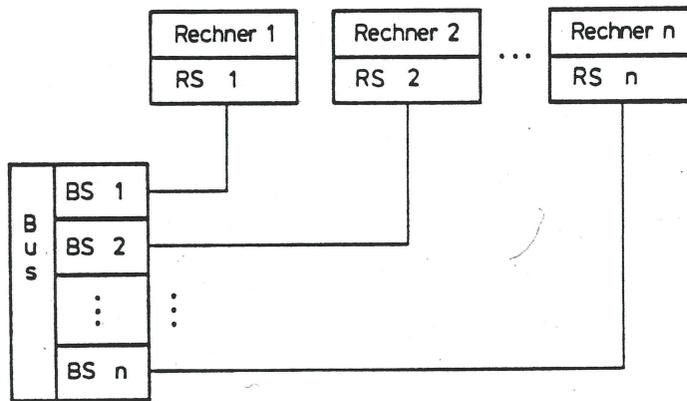


Bild 4: Rechner-redundantes Rechensystem

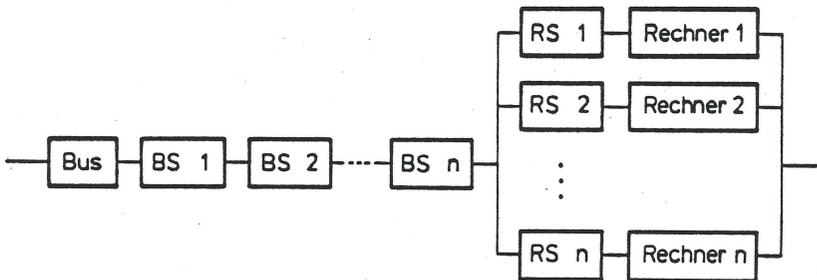


Bild 5: Zuverlässigkeitsschaltbild des rechner-redundanten Rechensystems

Also wird man Parallel-Redundanz auch beim Bus einführen (Bild 6). Dies erhöht nun umgekehrt die Zahl der Rechneranschlüsse, was die Zuverlässigkeit jedes Rechners reduziert. Entsprechend läßt sich die Zuverlässigkeit der Rechner bei mehreren Rechneranschlüssen durch Serien-Systeme aus Rechner und Rechner-Schnittstellen modellieren. So erhält man als Zuverlässigkeitsschaltbild des rechner- und bus-redundanten Rechensystems Bild 7.

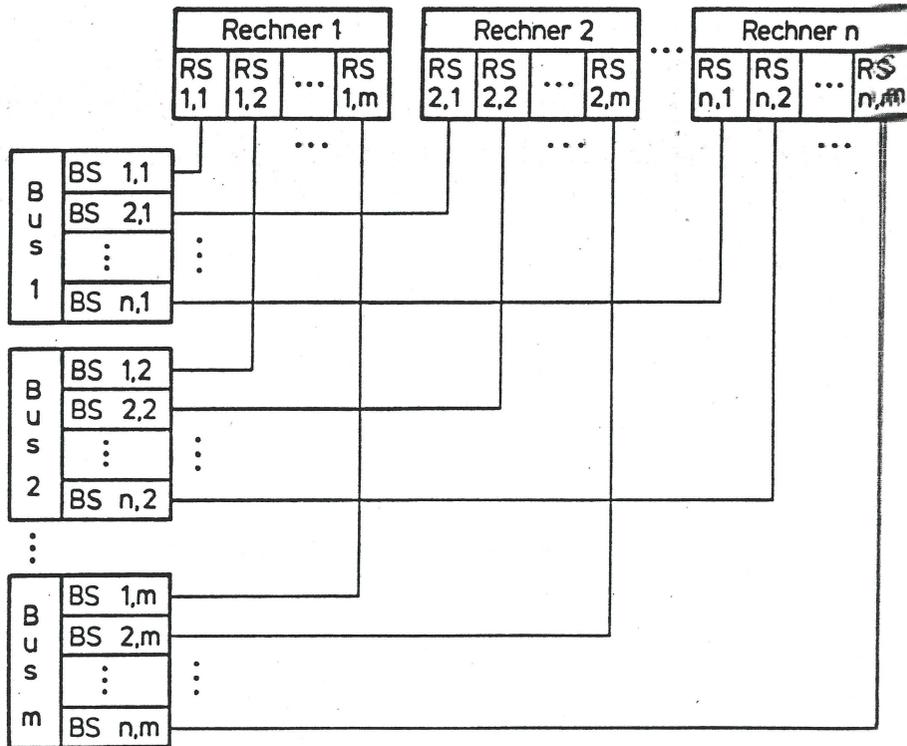


Bild 6: Rechner- und bus-redundantes Rechensystem

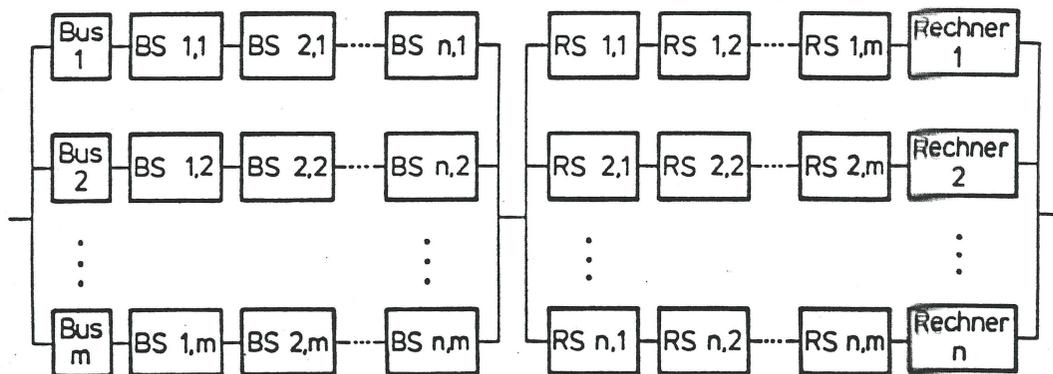


Bild 7: Zuverlässigkeitsschaltbild des rechner- und bus-redundanten Rechensystems

Die durch Bild 7 ausgedrückte Abhängigkeit der Zuverlässigkeit des rechner- und bus-redundanten Rechensystems von der Zuverlässigkeit von Rechner, Rechner-Schnittstelle, Bus-Schnittstelle und Bus lautet unter Verwendung der Formel für Parallel-Serien-Systeme in [Görk\_69]

$$R_{\text{System}} = (1 - (1 - R_{\text{Bus}} * R_{\text{BS}}^n)^m) (1 - (1 - R_{\text{Rechner}} * R_{\text{RS}}^m)^n)$$

## 2.2 Numerische Zuverlässigkeitsauswertung

Setzt man  $R_{\text{Rechner}}=0.7$ ,  $R_{\text{RS}}=R_{\text{BS}}=0.9$  und  $R_{\text{Bus}}=0.8$ , so erhält man durch Einsetzen in die hergeleitete Formel als Zuverlässigkeit des Rechensystems in Abhängigkeit von der Rechner- und Busanzahl die Werte in der folgenden Tabelle:

m \ n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	.45360	<u>.52255</u>	.49910	.45645	.41263	.37183	.33476	.30132	.27119	.24407
2	<u>.55929</u>	.71184	<u>.72704</u>	.69675	.65229	<u>.60447</u>	.55715	.51174	.46880	.42856
3	.55366	<u>.75920</u>	<u>.81866</u>	.81649	.78805	.74839	.70412	.65835	.61266	.56796
4	.51504	.74704	<u>.84141</u>	<u>.86791</u>	.86021	.83476	.79982	.75974	.71699	.67308
5	.46912	.71065	.82910	<u>.87986</u>	<u>.89247</u>	.88286	.85986	.82851	.79187	.75191
6	.42406	.66514	.79887	.86854	<u>.89902</u>	<u>.90479</u>	.89442	.87315	.84432	.81021
7	.38227	.61710	.75954	.84318	.88855	<u>.90825</u>	<u>.91016</u>	.89935	.87918	.85205
8	.34425	.56945	.71581	.80927	.86653	.89831	<u>.91159</u>	<u>.91102</u>	.89980	.88027
9	.30990	.52353	.67031	.77019	.83658	.87847	.90189	<u>.91095</u>	<u>.90857</u>	.89689
10	.27893	.47997	.62461	.72812	.80120	.85126	.88342	.90124	<u>.90726</u>	<u>.90340</u>
11	.25104	.43903	.57967	.68457	.76218	.81858	.85803	.88355	.89733	<u>.90097</u>

Tab. 1: Zuverlässigkeit des Rechensystems in Abhängigkeit von der Zahl der Rechner (n) und der Zahl der Busse (m)

Durch das Entstehen von längeren Serien-Systemen durch Bus-Schnittstellen bzw. Rechner-Schnittstellen nehmen die Werte in den Spalten bzw. Zeilen nach anfänglicher Zunahme wieder ab. Dies war zu erwarten.

Bemerkenswert ist, daß auch die anfängliche Zunahme von links oben nach rechts unten sich ab  $n=8$ ,  $m=7$  nicht fortsetzt. Eine Systemzuverlässigkeit größer als die für  $n=8$ ,  $m=7$  läßt sich also hier nicht erreichen.

Eine mathematisch präzise Begründung erfordert etwas Vorarbeit und wird in Abschnitt 6 gegeben. Hier sei nur festgehalten, daß das Längenwachstum in den Serien-Zweigen für große  $n$ ,  $m$  die Systemzuverlässigkeit stärker reduziert, als sie durch das Vorhandensein von mehr Funktions-Wegen [Höfl\_78, KoUs\_79] verbessert wird.

### 3 Definition des Begriffs Parallel-Redundanz

In diesem Abschnitt wird eine Definition der Parallel-Redundanz gegeben, nachdem dieser Begriff in Abschnitt 2.1 anschaulich eingeführt wurde.

Unter Parallel-Redundanz [Görk\_69] wird Redundanz verstanden, bei der Komponenten des nichtredundanten Systems unter Beibehaltung der Verbindungsstruktur des nichtredundanten Systems und ihrer Belastung mehrfach ausgelegt sind. Ein System behalte seine Verbindungsstruktur

bei mehrfacher Auslegung einer Komponente K genau dann bei, wenn jede Auslegung der Komponente mit genau den Komponenten verbunden ist, mit denen K verbunden war. Dies impliziert, daß alle Komponenten mit denen K verbunden war, mehr Anschlüsse erhalten. Außerdem erhalten alle Komponenten, mit denen K verbunden war, z. B. eine Wertungsschaltung [KoUs\_79], falls funktionsbeteiligte Redundanz, bzw. z. B. ein Schaltglied [Görk\_69], falls nicht-funktionsbeteiligte Redundanz realisiert wird.

Rechner- und Bus-Schnittstellen in Abschnitt 2.1 sind im Sinne dieser Definition keine Komponenten, sondern Anschlüsse der Komponenten Rechner und Bus.

#### 4 Zuverlässigkeitsmodellierung durch Parallel-Serien-Systeme

Unter einem Subsystem wird entweder eine nicht mehrfach ausgelegte Komponente mit ihren Anschlüssen oder, falls die Komponente mehrfach ausgelegt ist, werden darunter alle ihre Auslegungen mit ihren Anschlüssen verstanden.

Durch Verallgemeinerung des einführenden Beispiels sieht man, daß alle Subsysteme in parallel-redundanten Rechensystemen als Parallel-Serien-Systeme modelliert werden können. Dabei wird die Zuverlässigkeitsreduktion von Subsystemen durch die Parallel-Redundanz in anderen Subsystemen jedoch nicht so gleichmäßig sein wie im einführenden Beispiel.

Die folgende Formel gibt allgemein die Zuverlässigkeit eines Subsystems S1 an, das aus einer m-fach ausgelegten Komponente besteht. Jede Auslegung der Komponente hat n Anschlüsse.

$$R_{S1} = 1 - \left( 1 - \prod_{i=1}^n R_i \right)^m \quad \text{mit } 0 < R_i \leq 1$$

Da die Komponente m-fach ausgelegt ist, gibt es in S1 m Funktions-Wege. Die Zuverlässigkeitsreduktion durch den Anschluß i wird durch den Faktor  $R_i$  ausgedrückt. Die n Anschlüsse an jeder Auslegung der Komponente von S1 können gemäß der Definition von Parallel-Redundanz z. B. dadurch erforderlich sein, daß ein mit S1 verbundenes Subsystem S2 aus einer n-fach ausgelegten Komponente besteht. Dies bedeutet, daß der Faktor  $R_i$  die Zuverlässigkeitsreduktion von S1 durch die Erweiterung von S2 von i-1 auf i Funktions-Wege ausdrückt.

Um die mathematische Behandlung zu vereinfachen, wird die obige Formel folgendermaßen umgeformt:

Wähle  $R \in \mathbb{R}$ ,  $0 < R < 1$ . Setze  $f(n) = \log_R \prod_{i=1}^n R_i$

$$\begin{aligned} \text{(oder rekursiv geschrieben: } f(1) &= \log_R R_1, \\ f(n+1) &= f(n) + \log_R R_{n+1}) \end{aligned}$$

$$\text{Dann gilt } R_{\text{Subsystem}} = 1 - (1 - R^{f(n)})^m$$

### 5 Grenzwerte der Systemzuverlässigkeit

Da die prinzipiellen Zusammenhänge an Systemen bestehend aus 2 Subsystemen am deutlichsten werden, werden im folgenden nur solche behandelt. Eine Erweiterung auf Systeme mit mehr Subsystemen ist mit entsprechendem Aufwand möglich.

Es sei ein System bestehend aus 2 Subsystemen gegeben und seine Zuverlässigkeit sei modelliert durch

$$R_{\text{System}}(n,m) = (1 - (1 - R^{f(n)})^m) (1 - (1 - R^{g(m)})^n) \quad \text{mit}$$

$R \in \mathbb{R}, 0 < R < 1, f(n) > 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}, g(m) > 0$  für alle  $m \in \mathbb{N}$ .

Im folgenden werde untersucht, bei welchem Wachstum von  $f(n)$  und  $g(m)$  sich bei geschickter Wahl großer  $n, m$  beliebige Systemzuverlässigkeit erreichen läßt.

Das System läßt sich genau dann beliebig zuverlässig bauen, wenn es eine Folge  $F_1$  von Paaren  $(n,m)$  gibt, so daß  $R_{\text{System}}(n,m)$  gegen 1 strebt. Im folgenden wird gezeigt, daß man sich auf die Betrachtung von Folgen  $F_2(n,m)$  beschränken kann, bei denen  $m$  (oder  $n$ ) streng monoton wächst.

- 1) Wenn es eine Folge  $F_2$  gibt, gibt es auch eine Folge  $F_1$ , nämlich  $F_2$  selbst.
- 2) Wenn es eine Folge  $F_1$  gibt, müssen sowohl  $n$  als auch  $m$  gegen  $\infty$  streben.

Konstruiere aus  $F_1$  eine Folge  $F_2$  folgendermaßen:

Übernimm das erste Element von  $F_1$  als erstes Element in  $F_2$ .

Übernimm die Elemente von  $F_1$  der Reihe nach als nächstes Element in  $F_2$ , wenn es in  $F_2$  noch kein Element gibt, dessen 2. Komponente größer gleich der 2. Komponente des gerade betrachteten Elements von  $F_1$  ist.

Die konstruierte Folge  $F_2$  beschreibt einen Zusammenhang zwischen  $m$  und  $n$ , der durch eine nicht an allen Argumenten definierte (partielle) Funktion  $h(m)$  von  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{N}$  beschrieben wird, wenn man  $n=h(m)$  setzt.  $h(m)$  ist an unendlich vielen Argumenten definiert.

Um zu entscheiden, ob sich beliebige Systemzuverlässigkeit erreichen läßt, wird  $h$  zunächst so gewählt, daß der linke Faktor sich (gerade noch) gegen 1 treiben läßt und dann geprüft, ob dies dann auch für den rechten Faktor gilt.

Wähle (möglichst schnell wachsende) partielle Funktion  $h(m)$  von  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{N}$ , die an unendlich vielen Argumenten definiert ist, so daß (trotzdem)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f(h(m)) - \text{lr}(m) = -\infty$$

Dabei werde die Grenzwertbildung nur über die  $m$  erstreckt, für die  $h(m)$  definiert ist,

$\text{lr}(m)$  sei eine abkürzende Schreibweise für  $\log_{\frac{1}{R}} n$ .

Fall 1  $\lim_{m \rightarrow \infty} g(m) - \text{lr}(h(m)) = -\infty$  für geeignet gewähltes  $h$  und

Grenzwertbildung nur über die  $m$ , für die  $h(m)$  definiert ist, d. h.  $f$  und  $g$  wachsen gemeinsam genügend langsam.

Es läßt sich jede Zuverlässigkeitsanforderung  $R_{\text{Anf}} < 1$  erfüllen wie folgt:

Gemäß Anhang A.1 existieren für jedes  $R_{\text{Anf}} < 1$  Schranken  $M_1, M_2 \in \mathbb{N}$ , so daß

$$1 - (1 - R^f(h(m)))^m \geq \sqrt{R_{\text{Anf}}} \text{ für alle } m \geq M_1, \text{ wenn } h(m) \text{ definiert ist,}$$

$$1 - (1 - R^g(m))^{h(m)} \geq \sqrt{R_{\text{Anf}}} \text{ für alle } m \geq M_2, \text{ wenn } h(m) \text{ definiert ist.}$$

Also gibt es ein  $M$ , das beide Bedingungen erfüllt, so daß gilt

$$R_{\text{System}}(h(M), M) \geq R_{\text{Anf}}$$

Fall 2  $\lim_{m \rightarrow \infty} g(m) - \text{lr}(h(m)) \neq -\infty$  für jede Wahl von  $h$  und

Grenzwertbildung nur über die  $m$ , für die  $h(m)$  definiert ist, d. h.  $f$  und  $g$  wachsen gemeinsam zu schnell.

Es läßt sich nicht jede Zuverlässigkeitsanforderung  $R_{\text{Anf}} < 1$  erfüllen, da sich gemäß Anhang A.1 nicht beide Faktoren gleichzeitig beliebig nahe an 1 herantreiben lassen.

## 6 Schlußbemerkungen

Parallel-Redundanz in Systemen kann durch Parallel-Serien-Systeme modelliert werden. Durch Parallel-Redundanz lassen sich Systeme selbst unter der Annahme perfekter Fehlererkennung (und gegebenenfalls

Umschaltung) nur dann beliebig zuverlässig bauen, wenn die Zuverlässigkeit von Subsystemen durch das Einführen von Parallel-Redundanz in anderen Subsystemen nur "langsam" reduziert wird. Eine Quantifizierung von "langsam" ist in Abschnitt 5 gegeben.

Da die Zuverlässigkeit der Busse durch das Einführen von Parallel-Redundanz bei den Rechnern und die Zuverlässigkeit der Rechner durch das Einführen von Parallel-Redundanz bei den Bussen im einführenden Beispiel zu "schnell" reduziert wird, läßt sich das einfache Rechensystem durch Parallel-Redundanz nicht beliebig zuverlässig bauen. Hiermit ist der in Abschnitt 2.2 beobachtete Maximalwert der Zuverlässigkeit des einfachen Rechensystems zu erklären. Trotzdem läßt sich eine erhebliche Zuverlässigkeitserhöhung erzielen (siehe auch Anhang A.2).

Sind Zuverlässigkeitsanforderungen durch das Einführen von Parallel-Redundanz nicht zu erfüllen, müssen andere Methoden angewendet werden. Hier sei auf [Do01\_77, Do02\_77, KoUs\_79, Neum\_56, Orty\_77, WiCo\_63] hingewiesen.

Für ihre Unterstützung bei der Erstellung des Manuskripts danken wir Klaus Echte, Prof. Winfried Görke, Birgit Meyer, Dr. Rüdiger Reischuk und Prof. Detlef Schmid.

## 7 Literatur

[Do01\_77] R. L. Dobrushin, S. I. Ortyukov:

Lower bound for the redundancy of self-correcting arrangements of unreliable functional elements;

Translated from Problemy Peredachi Informatsii, Volume 13, Number 1, pages 82-89, January-March, 1977 by Plenum Publishing Corporation, 227 West 17th Street, New York, N.Y.10011

[Do02\_77] R. L. Dobrushin, S. I. Ortyukov:

Upper bound on the redundancy of self-correcting arrangements of unreliable functional elements;

Translated from Problemy Peredachi Informatsii, Volume 13, Number 3, pages 56-76, July-September, 1977 by Plenum Publishing Corporation, 227 West 17th Street, New York, N.Y.10011

- [Gaed\_77] Karl-Walter Gaede:  
Zuverlässigkeit, Mathematische Modelle;  
Carl Hanser Verlag München Wien, 1977, Seite 59
- [Görk\_69] Winfried Görke:  
Zuverlässigkeitsprobleme elektronischer Schaltungen;  
BI Hochschulschriften, 820/820a; 1969, Seite 141, 136ff
- [Höfl\_78] Ute Höfle-Isphording:  
Zuverlässigkeitsrechnung, Einführung in ihre Methoden;  
Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1978, Seite 67
- [KoUs\_79] Boris A. Koslow, I. A. Uschakow:  
Handbuch zur Berechnung der Zuverlässigkeit für Ingenieure;  
In deutscher Sprache herausgegeben und ergänzt von Kurt  
Reinschke; Carl Hanser Verlag, München Wien, 1979, Seite  
486, 103, 504
- [MaKn\_74] H. v. Mangoldt, Konrad Knopp:  
Einführung in die höhere Mathematik, Erster Band;  
S. Hirzel Verlag Stuttgart, 15. Auflage, 1974, Seite 474
- [Neum\_56] J. von Neumann:  
Probabilistic logics and the synthesis of reliable organisms  
from unreliable components;  
Automata studies Edited by C. E. Shannon and J. McCarthy  
Annals of Mathematics Studies Number 34, Princeton  
University Press, 1956 (Fourth Printing 1965)
- [Orty\_77] I. Ortyukov:  
Synthesis of asymptotically nonredundant self-correcting  
arrangements of unreliable functional elements;  
Translated from Problemy Peredachi Informatsii, Volume 13,  
Number 4, pages 3-8, October-December, 1977 by Plenum  
Publishing Corporation, 227 West 17th Street, New York,  
N.Y.10011
- [WiCo\_63] S. Winograd, J. D. Cowan:  
Reliable Computation in the Presence of Noise;  
The M. I. T. Press, Massachusetts Institute of Technology,  
Cambridge, Massachusetts, 1963

## Anhang über Parallel-Serien-Systeme

### A.1 Grenzwertbetrachtungen

#### Behauptung

Für  $R, u, o, c \in \mathbb{R}$ ,  $0 < R < 1$  und jede Funktion  $f$  aus  $\mathbb{N}$  in  $\mathbb{R}$  mit  $f(n) \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$  gilt

( $lr(n)$  sei eine abkürzende Schreibweise für  $\log_{\frac{1}{R}} n$ )

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \begin{cases} \geq 0 & \text{für alle } n \in \mathbb{N} \\ \leq 1 & \text{für alle } n \in \mathbb{N} \\ \leq 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^u} + \text{eps} & \text{für alle eps} > 0 \text{ und für} \\ & \text{alle } n, n \geq n(\text{eps}), \text{ wenn} \\ & \text{für alle epsilon} > 0 \text{ für} \\ & \text{alle } n, n \geq n(\text{epsilon}), \text{ gilt} \\ & f(n) - lr(n) \geq u - \text{epsilon} \\ \geq 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^o} - \text{eps} & \text{für alle eps} > 0 \text{ und für} \\ & \text{alle } n, n \geq n(\text{eps}), \text{ wenn} \\ & \text{für alle epsilon} > 0 \text{ für} \\ & \text{alle } n, n \geq n(\text{epsilon}), \text{ gilt} \\ & f(n) - lr(n) \leq o + \text{epsilon} \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (1 - R^{f(n)})^n \begin{cases} = 0 & \text{wenn } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - lr(n) = \infty \\ = 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^c} & \text{wenn } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - lr(n) = c \\ = 1 & \text{wenn } \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - lr(n) = -\infty \end{cases}$$

#### Voraussetzungen

$$(V1) \quad R^{lr(n)} = R^{\log_{\frac{1}{R}} n} = \frac{1}{\left(\frac{1}{R}\right)^{\log_{\frac{1}{R}} n}} = \frac{1}{n}$$

(V2) Für  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha \neq 0$ , gilt gemäß [MaKn\_74]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{\alpha}{n}\right)^n = e^\alpha$$

Beweis

1) Da  $0 < R < 1$  und  $f(n) \geq 0$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ , gilt

$$0 \leq R^{f(n)} \leq 1 \quad \text{also}$$

$$1 \geq 1 - R^{f(n)} \geq 0 \quad \text{also}$$

$$1 \geq (1 - R^{f(n)})^n \geq 0 \quad \text{also}$$

$$0 \leq 1 - (1 - R^{f(n)})^n \leq 1$$

2) Sei  $u \in \mathbb{R}$ . Für alle  $\epsilon > 0$  gelte für alle  $n$ ,  
 $n \geq n(\epsilon)$ ,  $f(n) - lr(n) \geq u - \epsilon$ . Dann gilt

$$R^{f(n)} \leq R^{lr(n) + u - \epsilon}$$

also unter Verwendung von (V1)

$$R^{f(n)} \leq \frac{R^u - \epsilon}{n}$$

Wie bei 1) folgt

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \leq 1 - \left(1 - \frac{R^u - \epsilon}{n}\right)^n$$

Also gilt unter Verwendung von (V2)

(setze  $\alpha = -R^u - \epsilon$ )

für alle  $\epsilon > 0$  und für alle  $n$ ,  $n \geq n(\epsilon, \epsilon)$

$$1 - \left(1 - \frac{R^u - \epsilon}{n}\right)^n \leq 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^u - \epsilon} + \epsilon$$

Also gilt für alle  $n$ ,  $n \geq n(\epsilon, \epsilon)$ ,  $n \geq n(\epsilon)$ ,

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \leq 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^u - \epsilon} + \epsilon$$

Da  $\epsilon > 0$  und  $\epsilon > 0$  beliebig wählbar,

wähle zu gegebenem  $\epsilon > 0$  zuerst  $\epsilon$  so, daß

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{R^u - \epsilon} \geq \left(\frac{1}{e}\right)^{R^u} - \frac{\epsilon}{2}, \text{ danach } \epsilon = \frac{\epsilon}{2}$$

Dann gilt für alle  $n$ ,  $n \geq n(\epsilon)$  mit

$$n(\epsilon) = \max \{ n(\epsilon), n(\epsilon, \epsilon) \}$$

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \leq 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^u} + \epsilon$$

- 3) Sei  $o \in \mathbb{R}$ . Für alle  $\epsilon > 0$  gelte für alle  $n$ ,  
 $n \geq n(\epsilon)$ ,  $f(n) - lr(n) \leq o + \epsilon$ . Dann gilt

$$R^{f(n)} \geq R^{lr(n) + o + \epsilon}$$

also unter Verwendung von (V1)

$$R^{f(n)} \geq \frac{R^o + \epsilon}{n}$$

Wie bei 1) folgt

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \geq 1 - \left(1 - \frac{R^o + \epsilon}{n}\right)^n$$

Also gilt unter Verwendung von (V2)

(setze  $\alpha = -R^o + \epsilon$ )

für alle  $\epsilon > 0$  und für alle  $n$ ,  $n > n(\epsilon, \epsilon)$

$$1 - \left(1 - \frac{R^o + \epsilon}{n}\right)^n \geq 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^o + \epsilon} - \epsilon$$

Also gilt für alle  $n$ ,  $n \geq n(\epsilon, \epsilon)$ ,  $n \geq n(\epsilon)$ ,

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \geq 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^o + \epsilon} - \epsilon$$

Da  $\epsilon > 0$  und  $\epsilon > 0$  beliebig wählbar,  
 wähle zu gegebenem  $\epsilon > 0$  zuerst  $\epsilon$  so, daß

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{R^o + \epsilon} \leq \left(\frac{1}{e}\right)^{R^o} + \frac{\epsilon}{2}, \text{ danach } \epsilon = \frac{\epsilon}{2}$$

Dann gilt für alle  $n$ ,  $n \geq n(\epsilon)$  mit

$$n(\epsilon) = \max \{ n(\epsilon), n(\epsilon, \epsilon) \}$$

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \geq 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^o} - \epsilon$$

- 4) Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - lr(n) = \infty$ . Unter Verwendung von 2),

und da  $\epsilon$  beliebig groß gewählt werden kann, folgt

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \leq \epsilon$$

für alle  $\epsilon > 0$  und für alle  $n$ ,  $n \geq n(\epsilon)$ .

Unter Verwendung von 1) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (1 - R^{f(n)})^n = 0$$

5) Sei  $c \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - \ln(n) = c$ .

Unter Verwendung von 2) und 3) mit  $u = o = c$  folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (1 - R^{f(n)})^n = 1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{R^c}$$

6) Sei  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n) - \ln(n) = -\infty$ . Unter Verwendung von 3),

und da  $\epsilon$  beliebig klein gewählt werden kann, folgt

$$1 - (1 - R^{f(n)})^n \geq 1 - \epsilon$$

für alle  $\epsilon > 0$  und für alle  $n$ ,  $n \geq n(\epsilon)$ .

Unter Verwendung von 1) folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 1 - (1 - R^{f(n)})^n = 1$$

## A.2 Numerische Beispiele

Die folgenden Beispiele sollen einen Eindruck des numerischen Verhaltens von  $1 - (1 - R^{f(n)})^n$  vermitteln, da eine konventionelle "Kurven"diskussion an der geschlossen nicht möglichen Nullstellenbestimmung der ersten "Ableitung"

$(1 - R^{f(n)})^n (n R^{f(n)} \ln R^{f'(n)} / (1 - R^{f(n)}) - \ln(1 - R^{f(n)}))$  scheitert.

Das numerische Verhalten von  $1 - (1 - R^{f(n)})^n$  ist sowohl für Fall 1 in Abschnitt 5 zur Abschätzung der für gegebene Zuverlässigkeitsanforderungen nötigen Redundanz, als auch für Fall 2 in Abschnitt 5 zur Abschätzung der maximal erreichbaren Systemzuverlässigkeit und der für erreichbare Systemzuverlässigkeiten nötigen Redundanz interessant.

Die folgende Tabelle gibt bei  $R=0.9$  für einige  $f(n)$  die minimalen  $n$  an, für die  $1 - (1 - R^{f(n)})^n$  größer als  $(1 - 10^{-x}) = \text{MIN}_x$  ist, sofern ein solches  $n$  existiert.

Bei den  $f(n)$ , bei denen  $1 - (1 - R^{f(n)})^n$  ein Maximum besitzt, wird das Maximum sowie das zugehörige  $n = \text{MAX}_n$  angegeben.

$f(n)$	MIN_2	MIN_100	MIN_1000	MAX_n	MAXIMUM
	MIN_10				
$n$	--	--	--	--	7 1 - (1.0519 10 <sup>-2</sup> )
$n/10$	2	11	--	--	66 1 - (1.5699 10 <sup>-20</sup> )
$n/100$	1	5	101	--	658 1 - (1.0778 10 <sup>-199</sup> )
$n/1000$	1	3	43	1001	6579 1 - (3.8002 10 <sup>-1981</sup> )
$n^{0.5}$	3	27	--	--	302 1 - (1.2361 10 <sup>-23</sup> )
$n^{0.4}$	3	19	1678	--	2427 1 - (5.1395 10 <sup>-103</sup> )
$n^{0.3}$	3	15	276	12604	93866 1 - (1.0355 10 <sup>-1581</sup> )
$\ln(n)$	2	21	377	6039	-- --
$\ln(\ln(n))$	2	10	123	1379	-- --

Tab. 2: Angaben zum numerischen Verhalten von  
 $1 - (1 - R^{f(n)})^n$

# Informatik-Fachberichte

Herausgegeben von W. Brauer  
im Auftrag der Gesellschaft für Informatik (GI)

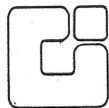
54

---

## Fehlertolerierende Rechnersysteme

GI-Fachtagung  
München, 11. – 12. März 1982

Gemeinsam veranstaltet von  
GI-Fachausschuß 8 und Fachausschuß 11 und  
GMD-Institut für Rechner- und Programm-  
strukturen, Siemens AG



Herausgegeben von E. Nett und H. Schwärtzel

---



Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York 1982